# Radial-Basis Function Networks, Wavelet-Based Networksを用いたモデル構成作用素の構成法

鈴 木 昇 一

# Construction-Methods of Model-Construction Operators Using Radial-Basis Function Networks and Wavelet-Based Networks

Shoichi Suzuki


## あらまし

多段階認識法で用いられる2種類のモデル構成作用素がRBF法、wavelet展開法を適用して、構成されている。得られたモデル構成作用素Tの像$T\varphi$は、原パターン$\varphi$のパターンモデルといわれ、RBF法、wave-let展開法で得られているパターンが正のスカラー定数倍についての不変性、ベキ等性を備えている様に構成し直されたものである。認識システムは原パターン$\varphi$を恰も、$T\varphi$かのごとく、錯覚して、$\varphi$の認識処理をすることが可能になる。


**キーワード：** モデル構成作用素　動径基底関数　ウェーブレット　1次独立な系　直交系　ベキ等性　多段階認識


## Abstract

The two applications of the method of RBF and the theory of wavelets will help us to construct new models of the corresponding pattern.Two images of two kinds of model-construction operators T obtained here as their applications are called two pattern-models. Two pattern-models remains invariant under multiplication of any positive scalar and are possessed of idempotency. Two models are needed to design a faculties of multi-stage recognition. A recognition system can extract features from $T\varphi$ instead of $\varphi$ and therefore can classify $T\varphi$ exactly as though $T\varphi$ were $\varphi$.


**Key words :** model-construction operator radial basis function wavelet linearly independent system orthogonal system idempotency multi-stage recognition

文教大学情報学部情報システム学科,茅ヶ崎市
Faculty of Information,Bunkyo University,Chigasaki City,253 Japan

## 1. まえがき

科学技術研究の役割は大きく、確実に変わりつつある。フィランスロピック(人間愛)な原則に基づいて行われる研究ではなく、産業、軍事、教育、医療にとって高い利用価値を持つと思われる研究がなされ、個人の知的好奇心を拠り所とする研究成果ですら、社会構造の中に取り込まれてしまい、企業社会に搾取される結果となっている(村上陽一朗)。

同時に、科学技術というものの全体の流れが変わりかけている。シンプルなユニットとルールの組合わせが複雑なシステムを作り出し、単純なシステムの群れからボトムアップ方式で創発し、システムは育っていくという考えが出てきた。外乱はシステムの成長を促すのだという見方をとるのである(池田夏樹)。

**ニューラルネット研究**[31]、**カオス研究**[97]、**遺伝アルゴリズム**[96]という3研究の流れは正に、この考えを拠り所としているかも知れない。脳の働きの研究についても、この3研究成果は、analysis by synthesis手法に基づくそのモデルを提供している。

科学とは脳が発見したものであり、脳が作り上げた知識の体系である。

主観を取り上げるのは、科学的ではない。客観を取り上げるべきである。そう言っているのは、誰であるか? やはり、脳ではないのか? 客観も主観も、脳が分類するものである。そう言った考え自体が脳科学の対象になり得る[3]。

「記憶・思考・認知・情動」などといった人間らしさを司る脳の機能は、数百億個ともいわれる膨大な神経細胞の群れの結合が作り出す複雑な神経回路網によって担当されている(杉田秀夫)。

1つの脳内神経細胞(ニューロン)は$10^4$～$10^5$個の入力端(シナプス)を持ち、ここからパルス列情報を入力し、1つの出力を出す。脳がアルゴリズムを獲得する際の重要な戦略の1つは学習性である。脳が獲得できるアルゴリズムの限界は遺伝子で規定される。1度獲得したものは保存され、階層構造化され、その上に更に進化のアルゴリズムが積み上がる仕組みになっている(遺伝のアルゴリズムにおける追加学習性)。ヒトは、進化の始めから下等動物を経て、ヒトに至までのすべての遺伝情報をDNA上に保有している。脳がアルゴリズムを獲得する場面における戦略の1つは学習性であり、脳は学習によって表引きテーブルにあらかじめ答えを用意しておいて、入力情報によって、その用意された答えの中から入力情報との関連度が最も高いものを選択し出力し、出力することで学習効果が生じ、その用いた答えを修正する。脳は、入力情報を大脳皮質にある**認知情報処理系**、大脳辺縁系扁桃体での**情動処理系**という2つの情報処理系で並列に処理する。脳の活性をもっとも大きく支配するのは情動(或いは、価値)情報であり、ヒトの情報はすべてこの点に帰する。ヒトにとって、感情がもっとも重要で強い情報であり、ヒトは感情を受けとめてもらいために、情報をやりとりするのである[86]。

脳とは何か?脳を理解するのに必要なことの1つに、各々のモジュールを人工的に構成することがある[3]。

脳を理解するのに、

① 物質系(ニューロン、それを支持するグリア細胞、並びに、血管)としての脳、

② 機能(心或いは意識)としての脳、

③ 情報の入出力装置、情報器官(入力は知覚であり、出力は骨格筋である)としての脳
という3分類が考えられる。大脳新皮質にはモジュールが複数存在する。モジュールの最も基本的な構造は、数千のニューロンで構成されている“コラムとよばれている単位の存在”である。コラムは皮質を構築する柱状の構造で、径は1ミリの数分の1程度、高さはほぼ皮質を貫通する。ヒトの大脳新皮質は、コラムの集積として記述できる。知覚のモジュールの中で、対立が著しいのは、目と耳、即ち、視覚と聴覚である。感情とは、知覚系から大量に送りこまれた情報の重み付けの結果である。視覚と聴覚の情報処理に共通する規則が、我々の獲得している言語規則である[3]。

**脳は、色と形と空間配置と運動を分けて処理することがわかっている**(養老孟司)。

目で受容された物体の視覚像は初め後頭葉へ伝えられ、それから3段ほどの領野を経て側頭葉へ伝えられる。側頭葉は視覚情報処理の最終段階であることがわかっている。サルにおいては、異なった図形特徴は脳の異なった位置に活動スポットを引き起こす。図形特徴のマップが側頭葉に存在し、動物にとって関連のある図形特徴が脳の近い位置の神経細胞の活動で表現されている[88]。

脳は、1度認知の粗い概念化を試みた後、更に詳しくこの仮定の検証を反復し(太郎の顔であると1度に認知するのではなく、顔であると仮定を立て検証した後、その結果、太郎ではないかとの結論を検証しようとするのである)、この仮定に自己矛盾がないところに至ってパターンの認知を行う。このように、脳が採用している情報処理戦略は**仮説立証主義的**であるらしい[86]。

**知能**という器が大きければ、沢山の知識が無理なく入る。知能とは知識を入れる器である(吉田稔)。

象形文字というのは対象の姿を線で表現した抽象であり、類人猿を含め、人間の肉体と眼球(視線)の動きが立体的でもなく、面的でもなく、線的である。これが文字が線で表現される1つの理由である(藤森照信)。

**マルチメディア**という一言に、情報技術に関わるあらゆる開発技術やその波及効果が込められている。**知能情報メディア**(intelligent information media)とは、「人間活動を支援する情報メディア」,「環境への適応能力を備えた情報メディア」であり、マルチメディア、複数のメディアを介して、報道・娯楽・教育・訓練・医療・経営等などに関し

(a) コミュニケーション支援　(b) 知覚的情動支援

(c) 認識・理解・判断の支援　(d) 発想的思考支援

を目的とし、「脳内の様々な活動に対して、我々は“現実感”と呼ぶべき重み付けを付与する[3]」などを参考にし、仮想現実(バーチャルリアリティ；virtual reality,VR)空間と対話する手段で知能化されたものである。文字、音声といった言語的な情報以外に、人間の動作や表現のようなノンバーバル(非言語的な)情報をヒューマンインターフェイスとして、用いるのである。自律的に動作する独立のプロセスで、他のエージェントとメッセージ交信して、協調動作できるソフトウェア技術が使われる。**マルチモーダル**インターフェイスと**擬人化エージェント**の開発が望まれている[87]。

本研究の目的は、数理形態学におけるモデル構成作用素

$$\mathbf{T}:\Phi \to \Phi \tag{1.1}$$

の構成を論じた研究に引き続き、RBF法、wavelets展開理論におけるモデル構成作用素 T の存在、構成法を論じることである。SS理論[84]は、脳内に例えば、外界 $\varphi$ の知覚的記憶表象[31]としての、パターンモデル $T\varphi$ が形成されて後、$\varphi$ のパターン認識がなされると、想定しているのである。

写像 T の**ベキ等性**(idempotence)

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{T} \tag{1.2}$$

は、edge detection operator についてもその満たすべき性質としてこれまでの研究されており[28], [29]、本研究では、写像 T に対し、更に、正のスカラー倍についての不変性

$$T \cdot a = T \text{ for any positive real number } a \tag{1.3}$$

をも備えているように、モデル構成作用素と呼ばれる写像 T を構成する。

パターンが何を表しているかを正規化・特徴抽出した後、識別・認識し、理解する能力を備えたシステムを構成する技術の総称が、**認識知能情報学**の応用(適用分野)としての**認識工学**[30]と云われるものである。

パターンが**記号**(symbol)と異なるのは、変形に耐え、その意味を保持出来ることにある。パターンとは、ある種のユニタリ座標変換(基本的なパターン変換)からある程度の変形を受けても、ある種の雑音が加わっても、その意味が保存されるような情報である。個々のパターンの意味とはその帰属する**カテゴリ**(category；類概念)である。

認識工学は、次の3大技術から成っている：

1° 同一のカテゴリに帰属するパターン同士の、座 標変換で代表される規則的な変形と曖昧な非線形変 換で代表される不規則的な変形とを如何なる手法で1つのパターンに変換・吸収するか(正規化； normalization)?

2° 同一のカテゴリに帰属するパターン同士から、その違いを軽減し、相異なるカテゴリに帰属するパターン同士からその違いが増大した特徴量の組を如 何なる処理で計量・抽出するか(特徴抽出；feature extraction)?

3° 抽出された特徴量の組を用いて、その帰属する であろうカテゴリを決定するか(識別；classification)? □

さて、パターンからパターンへの変換

$$\varphi \rightarrow T\varphi \tag{1.4}$$

によって、原パターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ の意味はそのパターンモデル $T\varphi \in \Phi$ へ変換されても、保持されるとしよう。言い替えれば、認識システムは、そのモデル $T\varphi$ を原パターン $\varphi$ と錯覚するものとしよう。

### Ⅰ. 数理形態学 [7],[83]

数理形態学(mathematical morphology)では、n次元ユークリッド空間 $R^n$ の、形態、或いは、形状としての2つの部分集合 $A,B \subseteq R^n$ に対し、

$$A \oplus B \equiv \{x \in R^n \mid x = a + b \text{ for some } a \in A \text{ and some } b \in B\} \quad \text{(the dilation of A by B)} \tag{1.5}$$

$$A \ominus B \equiv \{x \in R^n \mid x + b \in A \text{ for every } b \in B\} \quad \text{(the erosion of A by B)} \tag{1.6}$$

という2演算 $\oplus, \ominus$ を高々可算回使って、新しい部分集合 $C \subseteq R^n$ を作り出す。認識知能情報学[31]では、文字(character)、画像(image)、音声(speech sound)などの総称を**パターン**(pattern)というが、

$$\varphi_A(x) \equiv \begin{cases} 1 \text{ if } x \in A \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{1.7}$$

と定義される**パターン $\varphi_A(x)$ は部分集合 A と同一視できる**事実が、数理形態学の、パターン情報処理への適用の基盤である。

$$A \bigcirc B \equiv (A \ominus B) \oplus B \quad \text{(the opening of A by structuring element B)} \tag{1.8}$$

$$A \bullet B \equiv (A \oplus B) \ominus B \quad \text{(the closing of A by structuring element B)} \tag{1.9}$$

と定義される binary morphology における2演算

opening ○ and closing ●

を、式(1.7)の「部分集合 $A \subseteq R^n$ と2値化パターン $\varphi_A(x)$ との同値関係」を使って表現し直し、このような式(1.1)のパターン変換Tの2構造式 $T_\bigcirc, T_\bullet$ を提案し、その2性質としての以下の4式(1.10),(1.11),(1.12),(1.13)を証明し、パターン正規化技術の確保へ貢献することも研究済みである[83]。

ベキ等性

$$T_\bigcirc T_\bigcirc = T_\bigcirc \tag{1.10}$$

$$T_\bullet T_\bullet = T_\bullet \tag{1.11}$$

が成立しており、パターン変換の完結性

$$\varphi \rightarrow T_\bigcirc \varphi \rightarrow T_\bigcirc T_\bigcirc \varphi\ (=T_\bigcirc \varphi) \rightarrow T_\bigcirc T_\bigcirc T_\bigcirc \varphi\ (=T_\bigcirc \varphi) \rightarrow \cdots \tag{1.12}$$

$$\varphi \rightarrow T_\bullet \varphi \rightarrow T_\bullet T_\bullet \varphi\ (=T_\bullet \varphi) \rightarrow T_\bullet T_\bullet T_\bullet \varphi\ (=T_\bullet \varphi) \rightarrow \cdots \tag{1.13}$$

を指摘する事実が、**2パターン変換 $T_\bigcirc$, $T_\bullet$ が正規化操作と解釈されてよい**ことを保証する。

$T_\bigcirc$, $T_\bullet$ の提案は、パターンの多段階認識手法[84]に結び付くのが、利点である。

上述の手法が、gray scale morphology の理論を適用した形式へ拡張できることは判明してはいないが、

任意の実数値パターン $\varphi$ に対し、任意の正実定数 a についての不変性

$$T_\bigcirc (a \cdot \varphi) = T_\bigcirc \varphi \tag{1.14}$$

$$T_\bullet (a \cdot \varphi) = T_\bullet \varphi \tag{1.15}$$

が成り立っているので、gray scale morphology の理論の適用は実質上、考えなくてもよい、とも楽観的に考えられる。

□

## Ⅱ. 動径基底関数の族 [6] による1次結合展開理論

学習(learning)とは、与えられた有限個の入力・出力の対の例から、その例に含まれない未知入力に対しても、適切な出力を与えるような写像を推定・近似することだと考えよう。RBF(radial basis functions)法、動径基底関数法とは、このように、“学習”＝“入力・出力の対の例による、写像の近似”と想定し、与えられたデータから、関数を動径基底関数の重ね合わせとして大域的に表現する手法である[89]。データの個数より少ない動径基底関数の組を用いて、関数を近似するときは、GRBF(generalized RBF)法と称される[6]。

R を実数の集合として、入力・出力の対の例の集合

$$\{(\underline{x}_k, y_k) \mid \underline{x}_k \in R^d, y_k \in R, k=1\sim N\} \tag{1.16}$$

が与えられたとき、これを補間する関数 $\varphi$ として、**補間条件**

$$\varphi(\underline{x}_k) = y_k, k=1\sim N \tag{1.17}$$

を満たすものを、入力 $\{\underline{x}_k \mid k=1\sim N\}$ に中心を持つようなRBFを与えられた対の例の個数分だけ配置した

$$\varphi(\underline{x}) = \Sigma_{k=1}^{N}\ c_k \cdot \psi([(\underline{x}-\underline{x}_k, \underline{x}-\underline{x}_k)]^{1/2}) \tag{1.18}$$

なる形式で得ようとするアプローチがRBF法である。ここに、( , ), $\psi$ は各々、内積[1],[2],RBFである。

□

## Ⅲ. ウエーブレットの族[19]による展開理論

ウエーブレット(wavelets)とは、無限遠になるに従い十分早く0に近づく関数という意味である[90]。

ウエーブレット展開の基本定理の1つは、次のように述べられる。

1実変数tの複素数値関数q(t)が、自乗可積分条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ |\ q(t)\ |^2 < \infty \tag{1.19}$$

を満たし、アドミッシブル条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ q(t) = 0 \tag{1.20}$$

をも満たすとする。このとき、q(t)を基本ウェーブレットと呼ぶ。$\overline{q}$をqの複素共役として、任意の2実数$\tau$, a($\neq 0$)についての、ウエーブレット変換

$$WT(\tau, a) \equiv (1/\sqrt{a}) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \overline{q}\,(a^{-1} \cdot (t-\tau))\,\varphi(t) \tag{1.21}$$

を定義すると、

$\varphi(t)$が連続なすべての点tで、逆変換

$$\varphi(t)$$

$$= (1/C_q) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} da\ (1/a^2) \cdot WT(\tau, a)\,(1/\sqrt{a}) \cdot q(a^{-1} \cdot (t-\tau)) \tag{1.22}$$

ここに、$\mathfrak{F}(\lambda)$をq(t)のフーリエ変換(の定数倍)として、

$$C_q \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ |\ \mathfrak{F}(\lambda)\ |^2 / |\ \lambda\ | \tag{1.23}$$

$$\mathfrak{F}(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \exp(-\sqrt{-1}\,\lambda t) \cdot q(t) \tag{1.24}$$

が成立する[90]。

上述の積分ウエーブレット変換に対し、ウェーブレット級数展開[19]といわれるものも、勿論ある。直交ウェーブレットを見つけるための「**多重解像度解析**(multiresolution analysis)」の特別な“直交wavelet展開”について、説明しよう[90]。

1次元区間$\{x\ |\ 0 \leqq x < b\}$に注目し、ハール(Haar)関数として知られている実数値関数

$$\psi(x) \equiv \begin{cases} +1 \cdots 0 \leqq t < 2^{-1} \cdot b & \text{のとき} \\ -1 \cdots 2^{-1} \cdot b \leqq t < b & \text{のとき} \\ 0 \quad \cdots \text{その他} & \end{cases} \tag{1.25}$$

を基に、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ |\ \varphi(x)\ |^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_{k,\ell} \cdot \psi_{k,\ell}(x) \tag{1.26}$$

ここに、式(1.22)において

$$\tau = \ell\, a / 2^k \tag{1.27}$$

$$a = 1/2^k \tag{1.28}$$

と選んで、

$$\psi_{k,\ell}(x) \equiv (1/\sqrt{a}) \cdot \psi(a^{-1} \cdot (x-\tau))$$

$$= 2^{k/2} \cdot \psi(2^k x - \ell\, a) \tag{1.29}$$

の形に級数展開(ウエーブレット直交フーリエ式展開)できる。ウエーブレット展開係数$c_{k,\ell}$は、正規直交関係

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi_{k,\ell}(x) \cdot \psi_{m,n}(x) = \begin{cases} 1 \cdots k=m \wedge \ell=n & \text{のとき} \\ 0 \cdots k \neq m \vee \ell \neq n & \text{のとき} \end{cases} \tag{1.30}$$

が成り立っているから、

$$c_{k,\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \varphi(x) \cdot \psi_{k,\ell}(x) \tag{1.31}$$

と与えられる。

本研究では、パターンモデル $T\varphi$ を構成するときの基底としての形状素パターン(primitive shape components)として、以下の $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ を採用してもよい。

ガウス形関数

$$\psi(x) \equiv \exp(-x^2/(2\sigma^2)),\text{ここに、}\sigma>0 \tag{1.32}$$

について、正弦関数に相当する

$$\eta_1(x) \equiv (-\sigma)\cdot(d/dx)\psi(x) = (x/\sigma)\cdot\psi(x) \tag{1.33}$$

と、今1つの余弦関数に相当する

$$\eta_2(x) \equiv (-\sigma^2)\cdot(d^2/dx^2)\psi(x) = (1-x^2/\sigma^2)\cdot\psi(x) \tag{1.34}$$

とに注目し、その簡易化表現として、

$$\psi_1(x) \equiv \begin{cases} 1/2 \cdots |x|<1 & \text{のとき} \\ 1 \quad \cdots 1\leqq|x|<2 & \text{のとき} \\ 1/2 \cdots 2\leqq|x|\leqq 3 & \text{のとき} \\ 0 \quad \cdots |x|>3 & \text{のとき} \end{cases} \tag{1.35}$$

と、

$$\psi_2(x) \equiv \begin{cases} 1 \quad \cdots |x|<1 & \text{のとき} \\ -1/2 \cdots 1\leqq|x|\leqq 3 & \text{のとき} \\ 0 \quad \cdots |x|>3 & \text{のとき} \end{cases} \tag{1.36}$$

と[17]が得られる。或いは、1元 Gabor filter [29]

$$[2\pi\sigma^2]^{-1/2}\cdot\exp(-x^2/(2\sigma^2)) \quad \text{ここに、}\sigma>0 \tag{1.37}$$

を2次元化した Gabor filter

$$\psi(x) \equiv \exp[-\pi\{(x-x_0)^2\cdot a^2+(y-y_0)^2\cdot b^2\}]\cdot \exp[-\sqrt{-1}\ 2\pi\{u_0(x-x_0)+v_0(y-y_0)\}] \tag{1.38}$$

に注目し、その実部[92]

$$\psi_1(x,y) \equiv \exp[-\pi\{(2/3)\cdot c_i\}^2\{x^2+y^2\}]\cdot\cos[2\pi\{u_{ij}\cdot x+v_{ij}\cdot y)\}] \tag{1.39}$$

と、虚部

$$\psi_2(x,y) \equiv \exp[-\pi\{(2/3)\cdot c_i\}^2\{x^2+y^2\}]\cdot\sin[2\pi\{u_{ij}\cdot x+v_{ij}\cdot y)\}] \tag{1.40}$$

ここに、

$$u_{ij}=c_i\ \cos\theta_j \tag{1.41}$$

$$v_{ij}=c_i\ \sin\theta_j \tag{1.42}$$

$$c_i=\text{Gabor filter の frequency} \tag{1.43}$$

$$\theta_j=\text{Gabor filter の angle} \tag{1.44}$$

とを採用してもよい。 □

本研究によって構成された「正スカラー倍についての不変性、並びに、ベキ等性を備えたパターンモデル構成写像T」によって、カテゴリ帰属知識を用いた多段階認識が可能になり、

(ｉ☆) 通常の意味の解が存在すること

(ⅱ☆) その解が一意的であること

(ⅲ☆) 入力データの変化に対し、解が連続的に変化すること

の3条件のいずれか1つを満たさない不良設定問題(ill-posed problem) [10]の1解決を与える RBF 法、wavelet 展開理論に潜む「パターン照合の、今1つの機能」が暴露されたといえよう。

## 2. パターン認識問題

本章では、パターン認識分野の抱えている4つの課題が先ず、説明され(2.1節)、その後、この4つの課題が不変的パターン認識の形式で解決されるべきと指摘される(2.2節)。また、この不変的認識を公理論的手法で達成している「S.Suzukiが構築途中のパターン認識の数学的理論、即ち、SS理論[84]」の提案している**多段階認識法としての不動点探索形構造受精認識法**(2.5節)の取り扱うパターン表現空間としての**可分なヒルベルト空間** $\mathfrak{H}$ が説明され(2.3節)、SS理論に登場する基本的なパターン変換の働きとしての、**モデル構成作用素 T** の役割が説明される(2.4節)。

### 2.1 パターン認識分野の抱える4つの課題

パターン認識分野が抱える4つの課題とは、次のように説明される。

**問題Ⅰ(生成)**

パターン認識システムの構成公理系が与えられたとき、その公理系を満たす認識システムが受け入れるパターンの最小集合、中間集合、最大集合を作る問題.

**問題Ⅱ(解析)**

あるパターンとパターン認識システムの構成公理系が与えられたとき、そのパターンがその公理系を満たす認識システムによって受け入れられるパターンの1つであるかどうかを判定する問題.

**問題Ⅲ(帰納)**

パターンの集合が与えられたとき、この集合を受け入れる認識システムの構成公理系を作り出す問題.

**問題Ⅳ(等価性)**

パターン認識システムの2つの構成公理系が与えられたとき、その2つの公理系によって構成される2つのパターン認識システムがパターンの同じ集合(例えば、最小集合、中間集合、最大集合)を受け入れるどうかを判定する問題. □

上記の4問題の解決法がアドホックな(場当たり的な；in the ad hoc manner)やり方で与えられることは望ましくはない。

上述のの4つの課題が不変的パターン認識の形式で解決されるべきと指摘するのが、S.Suzukiが構築しようとする“パターン認識の数学的理論[84]”である。

それでは、次節で不変的パターン認識について説明しよう。

### 2.2 不変的パターン認識

感覚器官に与えられる刺激像の特性の変化にもかかわらず、知覚される特性(位置、大きさ、形、明るさなど)が比較的恒常を保つことを、心理学では、**知覚の恒常性**(perceptual constancy)と、称している[39],[42]。不変的パターン認識技術は、知覚の働きにおけるこの恒常性を取り入れることに関連した技術である。

パターンから抽出される特徴量が"あるパターン変換"について不変となるとき、特徴抽出する働きを持つ特徴抽出写像は不変性を備えているという。

特徴抽出写像の不変性は、見掛けは異なる複数個のパターンが同一のカテゴリ(category；類概念)に帰属するか否かを決定するのに、基本的に必要という思想を採用したのが、"不変的パターン認識の技術[4],[30],[39],[42]"である。

さて、次の2つの事柄(a),(b)に注目しよう。

(a) 2つのパターンから抽出される不変性特徴量の組が異なれば、不変性をもたらしているこのパターン変換の下でこの2つのパターンが同一のカテゴリに帰属することはあり得ないという可能性が残り、

(b) 不変性特徴量の組が一致するとき、不変性をもたらしているこのパターン変換の下で同一のカテゴリに帰属することになる。 □

上記の(a)の場合は、不変的パターン認識技術が不変的でないパターン認識技術が克服できない知覚の働きを達成できる理由となる。

(b)の場合は、しばしば、誤認識の原因になるけれども、利点と想定し不変的パターン認識技術を採用する理由であると説明される。

不変的パターン認識技術の確保に必要なパターンモデル構成法は既に示されているので[30],[34]～[40],[42]、本研究では、特に、陽に論じない。

### 2.3 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$

本研究では以後、パターン $\varphi$ は可分な一般抽象ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元とする。ここに、$\mathfrak{H}$ が可分(separable)とは、稠密な(dense)可算部分集合が $\mathfrak{H}$ に存在することを指す。理解のためには、例えば、特別な場合として、内積 $(\varphi,\eta)$ を、

$$(\varphi,\eta)=\int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\overline{\eta}(x) \tag{2.1}$$

ここに、$\overline{\eta}$ は $\eta$ の複素共役であり、

$$M：\text{n次元ユークリッド空間 } R^n \text{ の可測部分集合} \tag{2.2}$$

$$dm(x)：\text{正値Lebesgue-Stieltjes式測度} \tag{2.3}$$

とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(M；dm)$ で考えておけばよい[30]。$\varphi\in\mathfrak{H}$ のノルム $\|\varphi\|$ は無論、

$$\|\varphi\|\equiv\sqrt{(\varphi,\varphi)} \tag{2.4}$$

と定義される。

添字kの集合Kを有限集合に選ぶ。非負実数 $q_k$ の組 $\{q_k\}_{k\in K}$ と、閉線形作用素[1],[2] $B_k$ の組とを選び、内積 $(\varphi,\eta)_K$ を、

$$(\varphi,\eta)_K\equiv(\varphi,\eta)+\sum_{k\in k} q_k\cdot(B_k\varphi,B_k\eta) \tag{2.5}$$

と設定でき、ノルム $\|\varphi\|_K$ を、

$$\| \varphi \|_K \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)_K} \tag{2.6}$$

と定義できる。このとき、

$$\| \varphi - \eta \|_K = 0 \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow \| \varphi - \eta \| = 0 \wedge$$

$$[\forall k \in K^+ \equiv \{k \mid q_k > 0\}, \| B_k \varphi - B_k \eta \| = 0] \tag{2.8}$$

が成り立つことに注意しておく。

### 2.4 モデル構成作用素Tの役割

処理の対象とするパターン $\varphi$ の集合 $\Phi$ はある可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の、零元を含むある部分集合であり、この $\Phi$、並びに、式(1.1)の写像 $T:\Phi \to \Phi$ は次のaxiom 1を満たさなければならない。このとき、写像Tは**モデル構成作用素**(model-construction operator)と呼ばれ、$T\varphi \in \Phi$ は原パターン $\varphi \in \Phi$ の代りとなり得るという意味で、パターン $\varphi \in \Phi$ の**モデル**と呼ばれる[42]。

Axiom 1の(iii)は、パターン $\varphi \in \Phi$ の多段モデル化過程

$$\varphi \to T\varphi \to T(T\varphi) \to T(T(T\varphi) \to \cdots \tag{2.9}$$

が単一段階で完結していていることを要請していると解釈できる。

パターン集合 $\Phi$, モデル構成作用素Tの満たすべき公理とは、次のaxiom 1のことである。

<u>Axiom 1</u> **(パターン集合 $\Phi$ とモデル構成作用素Tとの対【$\Phi$,T】の満たすべき公理)**

(i)(零元の不動点性;fixed-point property of zero element) $0 \in \Phi \wedge T0 = 0$.

(ii)(錐性;cone property;或いは、吸収性質) $\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi \wedge T(a \cdot \varphi) = T\varphi$ for any positive real number a.

(iii)(ベキ等法則;idempotency;埋込性質) $\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi \wedge T(T\varphi) = T\varphi$.

(iv)(写像Tの非零写像性;non-zero mapping property of T) $\exists \varphi \in \Phi, T\varphi \neq 0$. □

上述のaxiom 1の(i)~(iv)について、簡単に説明しておこう。

(i)について:可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の、零元 $0 \in \mathfrak{H}$ を含む部分集合 $\Phi \subset \mathfrak{H}$ が与えられたとしよう。写像Tの定義域

$$\mathrm{Domain}(T) \equiv \{\varphi \mid \varphi \in \Phi \wedge T\varphi \in \Phi\} \tag{2.10}$$

を用意すると、Domain(T)の部分集合である、Tの零集合(null set;annihilating set)

$$\mathrm{Null}(T) \equiv \{\varphi \in \Phi \mid T\varphi = 0 \in \Phi\} \tag{2.11}$$

は零元(zero element)を含む。

(ii)について:正スカラー乗法の下での不変性(invariance under positive-scalar multiplication)を意味し、aを1に等しくはない正定数ととると、Tは恒等写像(identity mapping)ではない。

(iii)について: 写像 $T:\Phi \to \Phi$ の値域

$$\mathrm{Range}(T) \equiv \{\eta \in \Phi \mid \exists \varphi \in \Phi, \eta = T\varphi\} \tag{2.12}$$

の任意の元としてのパターン $T\varphi \in \Phi$ は、写像 $T:\Phi \to \Phi$ の不動点である。

(iv)について: $\varphi = 0 \in \Phi$ をとれば、(i)より、$T\varphi = 0 \in \Phi$ を得るから、この(iv)は、Tは

$$\forall \varphi \in \Phi, S\varphi = 0 \tag{2.13}$$

と定義される零写像(zero mapping) Sではないことを要請している。 □

上述のaxiom 1の(i),(ii),(iii)は次の事実を指摘している:パターン集合 $\Phi$ は、式(1.2)のベキ等性 $T \cdot T = T$ から必然的に生じて来る埋込関係

$$T \cdot \Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \subset \Phi \tag{2.14}$$

を満たし、原点(＝0)を始点とし、$\Phi$ の任意の点を通る半直線を含むような集合(錐；cone)であらねばならない。

尚、上述の axiom 1 を満たすパターン集合 $\Phi$ の逐次決定法は、文献[84]の第24部で説明されている[42]。

## 2.5 多段階認識法としての不動点探索形構造受精認識法

### 2.5.1 パターン集合を再帰的に定義可能な"領域方程式"

パターン(pattern)とは、ある種のユニタリ座標変換(基本的なパターン変換)からある程度の変形を受けても、ある種の雑音が加わっても、その意味が保存されるような情報である[82]。そのために、パターンというものは、冗長な表現形態を備えざるを得ない。よって、連想[69],[81]、認識[70],[74],[75]などに関して、**効率的なパターン情報処理機能を獲得**するためには、処理の対象とする問題の、冗長な表現形態を備えているパターン $\varphi\in\Phi$ に対し、その代りとなる

"加わっているある種の雑音を取り去るような簡潔な構造形式を備えており、然も、その指示する類概念(カテゴリ)がある種のユニタリ座標変換の下で不変であるような**パターンモデル**[37],[42] $T\varphi\in\Phi$"

が求めることが必要とされる。

パターンモデル $T\varphi\in\Phi$ によって、原パターン $\varphi\in\Phi$ の意味が確定すると考える訳である[77]。

そもそも、数理科学の対象と出来るように、パターンという概念を認識の働きと結び付けて、定義することさえ、これまでなされていない[82]。"パターン認識の数学的理論[84]"を構築しょうとしている S.Suzukiは最近になって、パターン集合を再帰的に定義可能な"領域方程式"を提案し、パターンという概念を確立しょうとしている。

### 2.5.2 不動点探索形構造受精認識法

**多段階認識法としての不動点探索形構造受精認識法**[70],[84]を説明しよう：

各カテゴリ番号 $j\in J$ の集合 $J$ のすべての部分集合のなす集合を $2^J$ と表そう。$\gamma\in 2^J$ を、パターン $\varphi\in\Phi$ の帰属する可能性のあるカテゴリ番号のリストとして採用しながら、この $\gamma$ を助変数に持つパターン変換作用素(構造受精作用素)

$$A(\gamma):\Phi\rightarrow\Phi \tag{2.15}$$

を用意し、パターンモデル $T\varphi$ を、

$$TA(\gamma)T\varphi=\eta\in\Phi \tag{2.16}$$

というように、パターンモデル $T\eta$ へと変換することを考えよう。このとき、写像 $T$ の、式(1.2)でいうベキ等性 $T\cdot T=T$ より、不動点性

$$T\eta=\eta \tag{2.17}$$

が成立しており、この構造受精変換段階で得られた式(2.17)のパターン $\eta$ は写像 $T$ の不動点となっている。

このような $\gamma\in 2^J$ を、多段階認識過程における各多段階でその都度、適切に選び、式(2.16)の構造受精変換を多段階的に何回か繰り返して行き、最終的にパターンモデルの帰属する可能性のあるカテゴリの番号を唯1つに、例えば、第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ に絞ることによって、入力パターン $\varphi\in\Phi$ を、

$$\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \tag{2.18}$$

と、認識すればよい。 □

# 3. パターン認識技術分野での諸基本定理

以後、内積,ノルムを各々、$(\varphi, \psi)$, $\|\varphi\| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で論じる。
本章では、

① ノルム増大性と直交性定理,ノルム近似・直交定理(3.1節)

② 2カテゴリ分類器の基本定理(3.2節)

③ 部分空間法の基本定理(3.3節)

を示し、その後、

④ パターンモデルの基本的な構成定理(3.4.3項の定理3.5)

を指摘する。

## 3.1 パターンモデルの構成に関する基本定理

### 3.1.1 ノルム増大性と直交性との関係

$\varphi, \psi, a$ を各々、2つのパターン、複素定数として、パターン $\varphi$ に雑音 $a \cdot \psi$ が加わったパターン $\varphi + a \cdot \psi$ のモデル $T(\varphi + a \cdot \psi)$ が

$$T(\varphi + a \cdot \psi) = T\varphi \tag{3.1}$$

という様に、原パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ と一致するためには、

$$(\varphi, \psi) = 0 \tag{3.2}$$

と、$\varphi, \psi$ が直交すれば、十分である(定理3.5を参照)。この事実に関連して、次の定理3.1を指摘しよう。

定理3.1は、$\varphi$ のノルムを増大させるためには、$\varphi$ と直交する $a \cdot \psi$ を $\varphi$ に加えればよいことを指摘している。

[定理3.1] **(ノルム増大性と直交性定理)**

$$\|\varphi\| \neq 0 \wedge \|\psi\| \neq 0 \tag{3.3}$$

とする。

$$\forall a \in Z(\text{複素数体}), \|\varphi\| \leqq \|\varphi + a \cdot \psi\| \tag{3.4}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi, \psi) = 0. \tag{3.5}$$

(証明) $\overline{a}$ を a の複素共役として、先ず、

$$\begin{aligned} &\|\varphi + a \cdot \psi\|^2 - \|\varphi\|^2 \\ &= (\varphi + a \cdot \psi, \varphi + a \cdot \psi) - (\varphi, \varphi) \\ &= \overline{a} \cdot (\varphi, \psi) + a \cdot (\psi, \varphi) + |a|^2 \cdot \|\psi\|^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

に注意する。

$\Leftarrow$ の証明：

$(\varphi, \psi) = 0 \Rightarrow (\psi, \varphi) = (\varphi, \psi) = 0$

$\Rightarrow \|\varphi + a \cdot \psi\|^2 - \|\varphi\|^2 = |a|^2 \cdot \|\psi\|^2 \geqq 0$

$\Rightarrow \|\varphi + a \cdot \psi\| \geqq \|\varphi\|.$

$\Rightarrow$ の証明：

$0 \leqq \|\varphi + a \cdot \psi\|^2 - \|\varphi\|^2$

$= a \cdot (\varphi, \psi) + a \cdot (\psi, \varphi) + |a|^2 \cdot \|\psi\|^2$

$\because$ 式(3.6)

$= \| \psi \|^2 \cdot [a + (\varphi, \psi) / \| \psi \|^2] \cdot [\overline{a} + (\varphi, \psi) / \| \psi \|^2] - |(\varphi, \psi)|^2 / \| \psi \|^2$

$$= \| \psi \|^2 \cdot |a + (\varphi, \psi) / \| \psi \|^2|^2 - |(\varphi, \psi)|^2 / \| \psi \|^2 \qquad (3.7)$$

が、任意の複素定数aに対し成り立つ。よって、特に、

$$a + (\varphi, \psi) / \| \psi \|^2 = 0 \qquad (3.8)$$

となるように、aをとれば、式(3.7)から、

$\| \psi \| \neq 0$ として、$0 \leqq -|(\varphi, \psi)|^2 / \| \psi \|^2$

が成り立ち、

$0 \geqq |(\varphi, \psi)|^2 \quad \therefore \quad (\varphi, \psi) = 0$。 □

### 3.1.2 ノルム近似性と直交性との関係

次の定理3.2の指摘していることは、次の通りである：

$$[(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \qquad (3.9)$$

が $\varphi$ の内に含まれる最大の $\psi$ 成分であり、

$\varphi$ からこの最大成分を取り去って得られるパターン

$$\varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \qquad (3.10)$$

は $\psi$ に直交している。 □

[定理3.2] **(ノルム近似・直交定理)**

式(3.3)を仮定すれば、次の(ⅰ),(ⅱ)が成り立つ。

(ⅰ)(ノルム近似定理)

$$\| \varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \| \leqq \| \varphi \| \qquad (3.11)$$

が成り立ち、

式(3.5)の成立

$$\Leftrightarrow \| \varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \| = \| \varphi \|. \qquad (3.12)$$

(ⅱ)(直交性) $(\varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi, \psi) = 0$.

(証明)

$\| \varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \|^2$

$= (\varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi, \varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi)$

$= \| \varphi \|^2 - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot (\varphi, \psi) - [(\varphi, \psi) / (\psi, \varphi)] / (\psi, \psi)$

$\quad + [|(\varphi, \psi)|^2 / (\psi, \psi)^2] \cdot (\psi, \psi)$

$= \| \varphi \|^2 - |(\varphi, \psi)|^2 / (\psi, \psi)$

$\therefore \quad \| \varphi - [(\varphi, \psi) / (\psi, \psi)] \cdot \psi \|^2 - \| \varphi \|^2$

$= -|(\varphi, \psi)|^2 / (\psi, \psi) \leqq 0$

を得て、これから(ⅰ),(ⅱ)の成立がわかる。 □

### 3.1.3 定理3.1の応用

定理3.1の応用を説明しよう。

各 $\psi_k \in \mathfrak{H}$ の組 $\{\psi_k\}_{k \in K} \subset \mathfrak{H}$ を、

$$\sum_{k \in k} a_k \cdot \psi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in K, a_k = 0 \qquad (3.13)$$

を満たすという意味で、1次独立な系 とする。

複素定数 $c_k$ の組を適切に選び、任意の $\eta \in \mathfrak{H}$ を $\sum_{k \in k} c_k \cdot \psi_k \in \mathfrak{H}$ で近似することを考えよう。

$$\| \eta - \sum_{k \in k} c_k \cdot \psi_k \| \to \min \qquad (3.14)$$

ならしめる各 $c_k = c_k(\eta) \in Z$(複素数の集合) を求めよう(最小自乗法；the method of least squares[24])。

連立1次方程式

$$\sum_{k\in k} c_\ell(\eta)\cdot(\psi_\ell, \psi_k)=(\eta, \psi_k), k\in K \qquad (3.15)$$

の解 $c_k(\eta)$, $_{k\in K}$ を求めれば

$$\eta=\sum_{k\in k} c_K(\eta)\cdot\psi_k+\eta_\perp, \qquad (3.16)$$

ここに、$\forall k\in K, (\eta_\perp, \psi_k)=0$ (3.17)

が成り立つ。

$$K'=K\cup\{n+1\}, K=\{1, 2, \cdots, n\} \qquad (3.18)$$

としてみよう。

任意の複素定数 a に対する最良近似性

$$\forall k\in K, (\psi', \psi_k)=0 \qquad (3.19)$$

$$\Rightarrow \|\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k\|$$

$$\leqq \|\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k+a\cdot\psi'\| \qquad (3.20)$$

が、定理3.1を適用して、成り立つことがわかる。

正整数 $n\geqq 1$ は任意であるから、

$(1^{\#})(\psi_2, \psi_1)=0$

$\Rightarrow \|c_1(\eta)\cdot\psi_1\|$

$\leqq \|c_1(\eta)\cdot\psi_1+a\cdot\psi_2\|$ for any $\forall a\in Z$.

$(2^{\#})(\psi_2, \psi_1)=0 \wedge (\psi_3, \psi_2)=0$

$\Rightarrow \|c_1(\eta)\cdot\psi_1+c_2(\eta)\cdot\psi_2\|$

$\leqq \|c_1(\eta)\cdot\psi_1+c_2(\eta)\cdot\psi_2+a\cdot\psi_3\|$

for any $\forall a\in Z$.

…

$(n^{\#})(\psi_2, \psi_1)=0 \wedge (\psi_3, \psi_2)=0$

$\wedge\cdots\wedge (\psi_{n+1}, \psi_n)=0$

つまり、

$$\forall i, \forall j(\neq i)\in\{1, 2, \cdots, n+1\}, (\psi_i, \psi_j)=0 \qquad (3.21)$$

$\Rightarrow \|c_1(\eta)\cdot\psi_1+c_2(\eta)\cdot\psi_2+\cdots+c_n(\eta)\cdot\psi_n\|$

$\leqq \|c_1(\eta)\cdot\psi_1+c_2(\eta)\cdot\psi_2+\cdots+c_n(\eta)\cdot\psi_n+a\cdot\psi_{n+1}\|$ for any $\forall a\in Z$.

が成立し、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in K}\subset\mathfrak{H}$ を式(3.21)を満たすという意味で、直交系に選定する利点が生じてくることがわかる。$\{\psi_k\}_{k\in K}\subset\mathfrak{H}$ が直交系でないと、$\{\psi_k\}_{k\in K}$ 内のの要素 $\psi_k$ の総数を増加させていっても、$\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k$ による $\eta$ の近似 はよくなるとは限らないのである。

### 3.1.4 応用2

定理3.2の応用を説明しよう。

$\{\psi_k\}_{k\in K}\subset\mathfrak{H}$ を1次独立な系としよう。定理3.2の不等式(3.11)において、

$\varphi$ の代りに、式(3.17)を満たす式(3.16)の

$$\eta_\perp=\eta-\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k$$

を考えると、不等式

$$\|\eta-\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k-[(\varphi, \psi)/(\psi, \psi)]\cdot\psi\|\leqq\|\eta-\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k\| \qquad (3.22)$$

が成立することがわかる。

$$\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k \qquad (3.23)$$

による $\eta$ の近似が、

$$\sum_{k\in k} c_k(\eta)\cdot\psi_k+[(\varphi,\psi)/(\psi,\psi)]\cdot\psi \tag{3.24}$$

により改善されるのである。特に、$\psi$ として 直交式(3.21)より弱い

$$\forall k\in K=\{1,2,\cdots,n\},(\psi_{n+1},\psi_k)=0 \tag{3.25}$$

を満たす $\psi_{n+1}$ を選定すれば、$\eta$ の近似が改善されることになる。

## 3.2 分離超平面に関する基本定理

$\mathfrak{H}$ の部分集合 $\mathfrak{D}$ は、任意の $\varphi,\eta\in\mathfrak{D}$ と、1より大きくない任意の非負実数 a($0\leqq a\leqq 1$) について、

$$a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\eta\in\mathfrak{D} \tag{3.26}$$

となるとき、凸集合(convex set)であるという。

凸集合 $\mathfrak{D}$ 上で定義された実数値関数

$$f:\mathfrak{D}\to R,\text{ ここに、R は実数全体の集合} \tag{3.27}$$

が、任意の $\varphi,\eta\in\mathfrak{D}$ と、1より大きくない任意の非負実数 a($0\leqq a\leqq 1$) に対し、

$$\begin{aligned}&f(a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\eta)\\&\leqq a\cdot f(\varphi)+(1-a)\cdot f(\eta)\end{aligned} \tag{3.28}$$

を満足するとき、式(3.27)の関数 f は $\mathfrak{D}$ 上で定義された凸関数(convex function)であるという。

ちなみに、

$$\begin{aligned}&f(a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\eta)\\&\geqq a\cdot f(\varphi)+(1-a)\cdot f(\eta)\end{aligned} \tag{3.28}$$

を満足するとき、式(3.27)の関数 f は $\mathfrak{D}$ 上で定義された凹関数(concave function)であるという。

部分集合 $\mathfrak{D}$ に対して、

$$\mathfrak{D}_{ch}\equiv\{\Sigma_i\ a_i\cdot\varphi_i\mid\varphi_i\in\mathfrak{D},\Sigma_i\ a_i=1\} \tag{3.29}$$

は凸集合である。以下、その証明：

$\psi,\eta\in\mathfrak{D}_{ch}$ をとれば、$\psi=\Sigma_i\ a_i\cdot\varphi_i,\eta=\Sigma_i\ b_i\cdot\varphi_i$ と表される。1より大きくない非負実定数 c($0\leqq c\leqq 1$) について、

$$\begin{aligned}&c\cdot\psi+(1-c)\cdot\eta\\&=\Sigma_i[c\cdot a_i+(1-c)\cdot b_i]\cdot\varphi_i\end{aligned} \tag{3.29}$$

であるが、

$$\begin{aligned}&\forall_i,\Sigma_i[c\cdot a_i+(1-c)\cdot b_i]\geqq 0\\&\Sigma_i[c\cdot a_i+(1-c)\cdot b_i]\\&=c\cdot\Sigma_i\ a_i+(1-c)\cdot\Sigma_i\ b_i\\&=c+(1-c)\qquad\because\ \Sigma_i\ a_i=1\wedge\Sigma_i\ b_i=1\\&=1\ .\end{aligned}$$

□

式(3.29)の $\mathfrak{D}_{ch}$ は、**凸苞**(convx hull)と呼ばれる。凸苞 $\mathfrak{D}_{ch}$ とは、$\mathfrak{D}$ を含む最小の凸集合のことである。

単位開球(unit open ball)を

$$Bal\equiv\{\varphi\in\mathfrak{H}\mid\|\varphi\|<1\} \tag{3.30}$$

とおく。$\mathfrak{D}$ の閉苞(closure) $\mathfrak{D}_c$ を、

$$\mathfrak{D}_c\equiv\cap\{\mathfrak{D}+\varepsilon\cdot Bal\mid\varepsilon>0\} \tag{3.31}$$

で定義する。ここに、

$$\mathfrak{D}+\varepsilon\cdot\mathrm{Bal}=\{\varphi\in\mathfrak{H}\mid\eta\in\mathfrak{D},\ \|\varphi-\eta\|<\varepsilon\}$$
$$=\cup\{\eta+\varepsilon\cdot\mathrm{Bal}\mid\eta\in\mathfrak{D}\} \tag{3.32}$$

であることに、注意しておく。

$\mathfrak{D}$ が凸集合ならば、$\mathfrak{D}_c$ は凸集合である。以下、その証明：

$\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ が共に、凸集合ならば、

$$\mathfrak{D}_1+\mathfrak{D}_2$$
$$\equiv\{\psi\in\mathfrak{H}\mid\psi=\varphi+\eta,\ \varphi\in\mathfrak{D}_1,\ \eta\in\mathfrak{D}_2\} \tag{3.33}$$
$$\mathrm{a}\cdot\mathfrak{D}$$
$$\equiv\{\psi\in\mathfrak{H}\mid\psi=\mathrm{a}\cdot\varphi,\ \varphi\in\mathfrak{D},\ \mathrm{a}\in\mathrm{R}(\text{実数全体の集合})\} \tag{3.34}$$

は、共に、凸集合であることが容易にわかる。よって、$\mathfrak{D}$, $\varepsilon\cdot\mathrm{Bal}$ は凸集合であるから、$\mathfrak{D}+\varepsilon\cdot\mathrm{Bal}$ は凸集合である。ところが、凸集合の集合族 $\{\mathfrak{D}_i\}_{i\in I}$ の共通部分はまた、凸集合である。よって、式(3.31)の $\mathfrak{D}_c$ は凸集合である。 □

以上の準備の下で、凸集合 $\mathfrak{D}$ と、$\mathfrak{D}$ の閉苞 $\mathfrak{D}_c$ の元でない $\psi$ とを分離する超平面が存在することを示そう。

1つのカテゴリとその外延(そのカテゴリの事例の集合)とを同一視することにすれば、凸集合 $\mathfrak{D}$ を形成する1つのカテゴリと、そのカテゴリに属さない(今1つのカテゴリに帰属する)パターン $\psi$ とを分離する超平面が存在することになるわけで、2カテゴリ分類器の基本定理に相当する次の定理3.3は**分離超平面定理**(separating－hyperplane theorem)と称されてもよいものである。

$\mathrm{b}\,\overline{\in}\,\mathrm{B}$ は、b は集合 B の元ではないの意とする。

[定理3.3](2カテゴリ分類器の基本定理)

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は実としよう。

空でない凸集合 $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{H}$ に対し、$\mathfrak{D}$ の閉苞 $\mathfrak{D}_c$ を考える。$\psi\,\overline{\in}\,\mathfrak{D}_c$ であるならば、

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},$$
$$(\varphi_0-\psi,\varphi)\geqq(\varphi_0-\psi,\varphi_0)>(\varphi_0-\psi,\psi) \tag{3.35}$$

が成り立つ。ここに、$\varphi_0\in\mathfrak{D}_c$ は $\varphi, \psi$ 間のノルム距離 $\|\varphi-\psi\|$ の自乗

$$\mathrm{f}(\varphi)\equiv\|\varphi-\psi\|^2 \tag{3.36}$$

の下限を与える $\varphi\in\mathfrak{D}_c$ のことである。つまり、

$$\inf\{\|\varphi-\psi\|\mid\varphi\in\mathfrak{D}_c\}=\|\varphi_0-\psi\|. \tag{3.37}$$

よって、

$$\mathrm{h}=2^{-1}\cdot[(\varphi_0-\psi,\varphi_0)+(\varphi_0-\psi,\psi)] \tag{3.38}$$

とおけば、

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D},$$
$$(\varphi_0-\psi,\varphi)>\mathrm{h}>(\varphi_0-\psi,\psi) \tag{3.39}$$

が成り立つ。それ故、$\eta$ を

$$\eta\equiv\varphi_0-\psi \tag{3.40}$$

と置けばわかるように、凸集合 $\mathfrak{D}$ と、閉苞 $\mathfrak{D}_c$ の元ではない $\psi\,\overline{\in}\,\mathfrak{D}_c$ とを分離する超平面(分離超平面；separating hyperplane)

$$\mathrm{SH}(\eta,\mathrm{h})\equiv\{\varphi\in\mathfrak{H}\mid(\eta,\varphi)=\mathrm{h}\} \tag{3.41}$$

が存在する。

(証明) 任意の $\varphi\in\mathfrak{D}$ に対して、式(3.36)の、$\mathfrak{D}$ 上で連続な関数 $\mathrm{f}(\varphi)$ は、$\mathrm{f}(\varphi)\geqq0$ であるから、$\mathfrak{D}$

上で下限をとる。そこで、

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}_c, f(\varphi_0) \equiv \| \varphi_0 - \psi \|^2 \leqq \| \varphi - \psi \|^2 \tag{3.42}$$

が成り立つ。

一方、$\mathfrak{D}$ は凸集合であるので、$\mathfrak{D}_c$ も凸集合である。従って、

$\varphi \in \mathfrak{D}, 0 \leqq a \leqq 1$ ならば、

$$\varphi_a \equiv a \cdot \varphi + (1-a) \cdot \varphi_0 \in \mathfrak{D}_c \tag{3.43}$$

である。この式(3.43)の $\varphi_a$ を式(3.42)の $\varphi$ に代入して得られる不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \| \varphi_0 - \psi \|^2 \leqq \| \varphi_a - \psi \|^2 \\ &= \| a \cdot (\varphi - \varphi_0) + \varphi_0 - \psi \|^2 \\ &= (a \cdot (\varphi - \varphi_0) + (\varphi_0 - \psi), a \cdot (\varphi - \varphi_0) + (\varphi_0 - \psi))^2 \\ &= a^2 \cdot \| \varphi - \varphi_0 \|^2 + 2a(\varphi - \varphi_0, \varphi_0 - \psi) + \| \varphi_0 - \psi \|^2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

を変形して、

$$\begin{aligned} 0 &\leqq g(a) \\ &\equiv a^2 \cdot \| \varphi - \varphi_0 \|^2 + 2a(\varphi - \varphi_0, \varphi_0 - \psi) \\ &= a \cdot [a - \{-2 \cdot (\varphi - \varphi_0, \varphi_0 - \psi) / \| \varphi - \varphi_0 \|^2\}] \cdot \| \varphi - \varphi_0 \|^2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

でなければならない。変数 $a(\geqq 0)$ の2次関数 $g(a)$ のグラフを描いてみると、わかるように、不等式(3.45)が任意の $\varphi \in \mathfrak{D}$ と任意の $0 \leqq a \leqq 1$ について成立するためには、

$$0 \leqq (\varphi - \varphi_0, \varphi_0 - \psi) \tag{3.46}$$

でなければならない。不等式(3.46)を変形すると、$(\varphi_0, \varphi_0 - \psi) \leqq (\varphi, \varphi_0 - \psi)$ 即ち、$\mathfrak{H}$ が実であることを考慮すると、

$$(\varphi_0 - \psi, \varphi_0) \leqq (\varphi_0 - \psi, \varphi) \tag{3.47}$$

が成り立つ。

一方、

$$\varphi_0 \in \mathfrak{D}_c, \psi \overline{\in} \mathfrak{D}_c \tag{3.48}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &0 < \| \varphi_0 - \psi \|^2 = (\varphi_0 - \psi, \varphi_0 - \psi) \\ &\therefore \quad (\varphi_0 - \psi, \psi) < (\varphi_0 - \psi, \varphi_0) \end{aligned} \tag{3.49}$$

が得られる。2式(3.48),(3.49)より、

$$(\varphi_0 - \psi, \psi) < (\varphi_0 - \psi, \varphi_0) \leqq (\varphi_0 - \psi, \varphi) \tag{3.50}$$

が成立する。後は、

$a_1 > a_2$ であれば、$b = 2^{-1} \cdot (a_1 + a_2)$ に対し、

$a_1 - b = 2^{-1} \cdot (a_1 - a_2) \geqq 0$

$b - a_2 = 2^{-1} \cdot (a_1 - a_2) \geqq 0$

であるから、

$$a_1 > b > a_2 \tag{3.51}$$

を考慮すれば、明らかである。 □

尚、処理の対象とするパターン $\Phi$ の集合として、

$$\Phi_{base} \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \subset \mathfrak{H} \tag{3.52}$$

を導入して、次の4種類 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ がひとまず、考えられる：

$\Phi_1 \equiv \{\Sigma_i\ a_i \cdot \varphi_i \mid a_i \in Z(\text{複素数体}), \varphi_i \in \Phi_{base} (i = 1, 2, \cdots)\}$

$(\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ の1次結合(linear combination)の全体) (3.53)

$\Phi_2 \equiv \{\Sigma_i\ a_i \cdot \varphi_i \mid a_i \geqq 0,\ \varphi_i \in \Phi_{base}(i=1,2,\cdots)\}$

$(\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ の非負1次結合(non-negative linear combination)の全体) (3.54)

$\Phi_3 \equiv \{\Sigma_i\ a_i \cdot \varphi_i \mid a_i \geqq 0,\ \varphi_i \in \Phi_{base}(i=1,2,\cdots), \Sigma_i\ a_i = 1\}$

$(\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ の凸結合(convex combination)の全体) (3.55)

$\Phi_4 \equiv \{\Sigma_i\ a_i \cdot \varphi_i \mid \varphi_i \in \Phi_{base}(i=1,2,\cdots), \Sigma_i\ a_i = 1\}$

$(\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ の成す**直線**(straight line)) (3.56)

□

### 3.3 部分空間法での基本定理

部分空間法(subspace method)に基づく識別規則(classification rule)とは、次のように説明される。

$\mathfrak{D}_j$：第 $j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{D}_j$ の外延としての閉部分空間(closed subspace)

として、

$$\mathrm{dis}(\varphi, \mathfrak{D}_j) \equiv \inf\{\|\varphi - \eta_j\| \mid \eta_j \in \mathfrak{D}_j\}\ (\varphi \text{ と } \mathfrak{D}_j \text{ とのノルム距離}) \tag{3.57}$$

を求め、$\varphi$ が閉部分空間 $\mathfrak{D}_j$ に含まれる程度(類似度；similarity measure)

$$\mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_j) \equiv 1 - \mathrm{dis}(\varphi, \mathfrak{D}_j) / \Sigma_{i \in J}\ \mathrm{dis}(\varphi, \mathfrak{D}_j) \tag{3.58}$$

の規格化類似度(normalized sm)

$$\mathrm{nsm}(\varphi, \mathfrak{C}_j)$$
$$\equiv \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_j) / \sum_{i \in J} \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_i) \tag{3.59}$$

を、各 $j \in J$ にわたり、計算する。

相互排除性

$$\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_j = \phi\ (\text{empty set}) \tag{3.60}$$

は要求されないが、

$$\varphi \in \mathfrak{D}_{j(1)} \cap \mathfrak{D}_{j(2)} \cap \cdots \cap \mathfrak{D}_{j(k)}$$
$$\Rightarrow \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_{j(1)}) = \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_{j(2)}) = \cdots = \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{C}_{j(k)}) = 1$$
$$\wedge [\forall i \in J - \{j(1), j(2), \cdots j(k)\}, 0 < \mathrm{sm}(\varphi, \mathfrak{D}_i) < 1] \tag{3.61}$$

には注意しておく必要があろう。

$\mathrm{argmax}_{i \in J}\ \mathrm{nsm}(\varphi, \mathfrak{C}_i)$ ( $\mathrm{nsm}(\varphi, \mathfrak{C}_i)$ , $i \in J$

の最小値を与える最も若いカテゴリ番号) $= j \in J$

を求め、

$$\varphi \text{ belongs to the j-th category } \mathfrak{C}_j \tag{3.62}$$

と、処理対象パターン $\varphi \in \Phi \subset \cup_{i \in J} \mathfrak{D}_i \subset \mathfrak{H}$ を認識するのが、**部分空間法的識別法**である。

次の定理3.4は、上記の部分空間法的識別法の基本定理に相当し、証明後、その応用を説明する。

[定理3.4] (部分空間法の基本定理)

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{H}$ の部分空間とする。

$\varphi$ を、$\mathfrak{D}$ からの距離が

$$d(\varphi) \equiv \inf\{\|\varphi - \eta\| \mid \eta \in \mathfrak{D}\} \tag{3.63}$$

であるような $\mathfrak{H}$ のベクトル(パターン)とすれば、

$$\forall \eta_1, \forall \eta_2 \in \mathfrak{D}, \|\eta_1 - \eta_2\|$$
$$\leqq [\|\varphi - \eta_1\|^2 - d^2]^{1/2} + [\|\varphi - \eta_2\|^2 - d^2]^{1/2}\ . \tag{3.64}$$

(証明) 文献[93]に証明されている。少し、詳しく、説明する。

$\psi_1 \equiv \varphi - \eta_1, \psi_2 \equiv \varphi - \eta_2$ とおけば、任意の複素数 $a(\neq 1)$ に対して、$(\eta_1 - a \cdot \eta_2)/(1-a) \in \mathfrak{D}$ であるから、式(3.63)の有する意味から、

$$\| \varphi - (\eta_1 - a \cdot \eta_2)/(1-a) \|^2 \geqq d(\varphi)^2 \tag{3.65}$$

が成り立つ。$|1-a|^2$ を両辺にかけて、不等式(3.65)を書き直せば、

$$\| \psi_1 - a \cdot \psi_2 \|^2 \geqq d(\varphi)^2 \cdot (1-a) \cdot (1-\overline{a}) \tag{3.66}$$

を得、更に、書き直せば、

$$\begin{aligned} &[(\psi_1, \psi_1) - d(\varphi)^2] - \overline{a} \cdot [(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2] - a \cdot [(\psi_2, \psi_1) - d(\varphi)^2] \\ &+ a \cdot a \cdot [(\psi_2, \psi_2) - d(\varphi)^2] \geqq 0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

となる。

改めて、検証すれば、2式(3.66),(3.67)は $a=1$ のときにも成立することがわかる。そこで、特に、

$$a = [(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2] / [(\psi_2, \psi_2) - d(\varphi)^2] \tag{3.68}$$

とおけば、不等式(3.67)から、不等式

$$\begin{aligned} &|(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2|^2 \\ &\leqq [(\psi_1, \psi_1) - d(\varphi)^2] \cdot [(\psi_2, \psi_2) - d(\varphi)^2] \end{aligned} \tag{3.69}$$

が得られる。ところが、Re[…]を…の実部として、

$$\begin{aligned} &\| \eta_1 - \eta_2 \|^2 = \| \psi_1 - \psi_2 \|^2 \\ &= [\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2] + [\| \psi_2 \|^2 - d(\varphi)^2] - [(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2] - [(\psi_2, \psi_1) - d(\varphi)^2] \\ &= [\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2] + [\| \psi_2 \|^2 - d(\varphi)^2] - 2 \cdot \mathrm{Re}[(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2] \\ &\leqq [\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2] + [\| \psi_2 \|^2 - d(\varphi)^2] + 2 \cdot |(\psi_1, \psi_2) - d(\varphi)^2| \end{aligned} \tag{3.70}$$

であるから、式(3.69)によって、

$$\begin{aligned} &\| \eta_1 - \eta_2 \|^2 \\ &\leqq [\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2] + [\| \psi_2 \|^2 - d(\varphi)^2] \\ &\quad + 2 \cdot [[(\psi_1, \psi_1) - d(\varphi)^2] \cdot [(\psi_2, \psi_2) - d(\varphi)^2]]^{1/2} \\ &= [[\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2]^{1/2} + [\| \psi_1 \|^2 - d(\varphi)^2]^{1/2}]^2 \end{aligned} \tag{3.71}$$

を得て、証明が終わった。 □

定理3.4の応用を説明しよう。

パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ が与えられたとしよう。$d(T\varphi)$ を計算する。

このとき、任意の $T\varphi_1, T\varphi_2 \in \mathfrak{D}$ について、不等式

$$\begin{aligned} &\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| \\ &\leqq [\| T\varphi - T\varphi_1 \|^2 - d(T\varphi)^2]^{1/2} + [\| T\varphi - T\varphi_2 \|^2 - d(T\varphi)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.72}$$

が成り立ち、モデル $T\varphi$ を介しての、同一のカテゴリの外延に帰属する2つのパターン $T\varphi_1, T\varphi_2$ の相違性を評価できる事実を指摘している。

不等式(3.72)は、任意の $T\varphi_1, T\varphi_2 \in \mathfrak{D}$ について、

$$\begin{aligned} &\| T\varphi_1 - T\varphi_2 \| = \| T\varphi - T\varphi_2 - (T\varphi - T\varphi_1) \| \\ &\leqq \| T\varphi - T\varphi_1 \| + \| T\varphi - T\varphi_2 \| \\ &\because \quad 3\text{角不等式 } \| \varphi + \eta \| \leqq \| \varphi \| + \| \eta \| \end{aligned} \tag{3.73}$$

という評価の精密化である。

特に、$\omega_k \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ を第 $k \in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターンとして、

$$\varphi_1 \text{ はそのままにして、} \varphi_2 = \omega_j, \varphi = \omega_i \tag{3.74}$$

としてみれば、任意の $T\varphi_1, T\omega_j \in \mathfrak{D}$ について、不等式

$$\| T\varphi_1 - T\omega_j \| \leqq [\, \| T\omega_j - T\varphi_1 \|^2 - d(T\omega_i)^2 \,]^{1/2} + [\, \| T\omega_i - T\omega_j \|^2 - d(T\omega_i)^2 \,]^{1/2} \quad (i \neq j) \tag{3.75}$$

が成り立つ。

## 3.4　1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in K}$ に基づくパターンモデル $T\varphi$

### 3.4.1　パターン形状素 $\psi_k$ の組 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ と、抽出される特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\{u(\varphi, k)\}_{k\in L}$ との選定

文献[42]で提案されている2元パターンモデル $T\varphi$ と同じ形式のパターンモデルが、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ が1次独立な系の典型としての直交系である場合に、手書き漢字パターン $\varphi$ を、平行移動、縮小・拡大、回転なるユニタリ座標変換の下で不変で、然も、誤認識がなされない程度に簡潔に、再表現できることが、計算機シミュレーションで説明されている[49],[66],[33],[39]。

各 $\psi_k$ を、これ以上分解出来ないという意味で、極小のパターン(**パターン形状素；**primitive shape-component)[42]とし、$\{\psi_k\}_{k\in L}$ を1次独立な系とすると、

$$T\varphi \equiv \sum_{k\in k} u(\varphi, k) \cdot \psi_k$$

ここに、$u(\varphi, k)$ はパターン $\varphi$ から抽出される第$k\in L$番目の特徴量　(3.76)

□

ある空間部分領域 $M(\ni x)$ に分布しているパターン $\varphi=\varphi(x)$ をどのように1つの知覚的対象として認知するかに関連して、人間が問題としているパターン $\varphi$ を的確に認知出来ないのは何故か?　処理対象パターン $\varphi$ に対応して、意識内部に確保されたパターンモデル $T\varphi$ に、$\varphi$ の情報構造が適切に反映されていないからである。

**主成分分析**[30](K−L直交系[46] $\{\psi_k\}_{k\in L}$ に基づくパターンの直交展開)に近い手法を用いて、パターモデルを意識内に作り上げているらしいという指摘もあるが、本研究では、このパターンモデル形成過程

$$\text{“}\ \varphi \rightarrow T\varphi\ \text{”} \tag{3.77}$$

を次の手段で解決しょうとしている：

原パターン $\varphi$ に対応して、式(3.76)で示されるその**情報構造記述**(structural description)としてのパターンモデル $T\varphi$ を確保する。そして、$\varphi$ をモデル $T\varphi$ として、錯覚し、認知する。　□

パターン認識の数学的理論[84]では、このように、処理対象パターン $\varphi$ のモデル $T\varphi$ を上手に構成し、適切に $T\varphi$ を利用することによって、パターン認識、パターン理解、パターン記憶並びにパターン系列の連想[30]～[84]などの、パターン認知に関するパターン情報処理が可能になると、考えている。モデル $T\varphi$ が上手に構成出来るためには、経験に従い、対象 $\varphi$ の物理的属性を各特徴量 $u(\varphi, k)$ の組

$$\underline{u}(\varphi) \equiv \{u(\varphi, k)\}_{k\in L} \tag{3.78}$$

として抽出することが必要とされよう。パターンモデル $T\varphi$ の構成にあたり、自然界の物理法則を制約条件として用いることは、2構成成分

(イ)1次独立なパターン形状素 $\psi_k$ の組 $\{\psi_k\}_{k\in L}$

(ロ)パターン $\varphi$ から抽出される特徴量 $u(\varphi, k)$ の組 $\{u(\varphi, k)\}_{k\in L}$

の選定に反映されねばならない。その帰属するカテゴリが唯1つ存在するような通常の大多数の原パターン $\varphi$ に比し、モデル $T\varphi$ が、「より規則的な形状が好まれる」という一般的傾向(プレグナンツの法則)と「見慣れた形状が選ばれる」という傾向とを備えるかどうかは、ひとえに、上記の2構成成分 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ , $\{u(\varphi, k)\}_{k\in L}$ の選定に依存しているのである。前者の $\{\psi_k\}_{k\in L}$ の選定法については、

第6章で説明されている。後者の$\{u(\varphi,k)\}_{k\in L}$の選定法については、以下と第4,5章で説明される。

### 3.4.2 1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ によるパターンの1次展開

式(3.13)が成り立つという意味で、

$\{\psi_k\}_{k\in L}$ は**1次独立な系**である

としょう。問題としているパターン$\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$を、複素定数$c_k$の組を適切に選び、$\psi_k, k\in L$の線形1次結合$\sum_{k\in k} c_k\cdot\psi_k\in\mathfrak{H}$で近似することを考えよう。

$$\|\varphi-\Sigma_{k\in K}\ c_k\cdot\psi_k\|^2\rightarrow\min \tag{3.79}$$

ならしめる各複素係数$c_k=c_k(\varphi)$は、連立1次方程式

$$\sum_{q\in L}(\psi_q,\psi_k)\cdot c_q(\varphi)=(\varphi,\psi_k),\ k\in L \tag{3.80}$$

の解として求めることが出来る。このとき、$\varphi\in\Phi$は、

$$\exists\varphi_\perp\in\mathfrak{H},\ \varphi=\Sigma_{k\in K}\ c_k(\varphi)\cdot\psi_k+\varphi_\perp\wedge[\forall k\in L,(\varphi_\perp,\psi_k)=0] \tag{3.81}$$

と、1次展開される。

$$\{\psi_k\}_{k\in L}\text{は直交系}\Rightarrow\{\psi_k\}_{k\in L}\text{は1次独立な系} \tag{3.82}$$

であるから、もし、$\{\psi_k\}_{k\in L}$が、

$$(\psi_k,\psi_q)=\begin{cases}0 & \text{if } k\neq q\\ \|\psi_k\|^2>0 & \text{if } k=q\end{cases} \tag{3.83}$$

を満たすという意味で、直交系の場合、連立1次方程式(3.80)から、各複素係数$c_k(\varphi)$は、

$$\forall k\in L,\ c_k(\varphi)=(\varphi,\psi_k)/(\psi_k,\psi_k) \tag{3.84}$$

と、与えられることがわかる。

### 3.4.3 モデル構成作用素の基本構成

式(3.76)で定義される式(1.1)の写像$T:\Phi\rightarrow\Phi$は2.3節のaxiom1を満たせば、**モデル構成作用素**と呼ばれる[84]。T内の各特徴量$u(\varphi,k)$の1設定法が、以下のように説明される。

連立1次方程式(3.80)の解としての1次展開係数$c_k(\varphi)$の組を使って定義される複素数

$$u(\varphi,k)\equiv\begin{cases}0 & \cdots\forall q\in L,c_q(\varphi)=0\ \text{のとき}\\ c_k(\varphi)/[\sum_{k\in L}|c_k(\varphi)|^2]^{1/2} & \\ \qquad\cdots\exists q\in L,c_q(\varphi)\neq0\ \text{のとき}\end{cases} \tag{3.85}$$

を用意する。$u(\varphi,k)$は、パターン$\varphi\in\Phi$から抽出される第$k\in L$番目の特徴量である。このとき、特徴抽出写像

$$u:\Phi\times L\rightarrow Z(\text{複素数の集合}) \tag{3.86}$$

を導入していることになる。確率条件式

$$[\forall k\in L,0\leqq|u(\varphi,k)|^2\leqq1] \tag{3.87}$$

$$\wedge\sum_{k\in L}|u(\varphi,k)|^2=\begin{cases}1\cdots\exists k\in L,c_k(\varphi)\neq0\ \text{のとき}\\ 0\cdots\forall k\in L,c_k(\varphi)=0\ \text{のとき}\end{cases} \tag{3.88}$$

が成立している。

[定理3.5]**(パターンモデルTφの構成基本定理)**

$\{\psi_k\}_{k\in L}$は1次独立な系とする。式(3.85)で定義される特徴抽出写像uを採用して得られ、式(3.76)で定義される式(1.1)の写像Tは、条件式

$0 \in \Phi \wedge$

$[\forall \varphi \in \Phi, a \cdot \varphi \in \Phi$ for any positive real number a$] \wedge [\forall \varphi \in \Phi, T\varphi \in \Phi]$ (3.89)

の下で、2.4節の axiom 1を満たす。 □

定理3.5を証明するために、先ず、補助定理3.1を示す。

[補助定理3.1]式(3.81)で $\varphi$ の代りに採用して得られる $\eta \in \Phi$ の1次展開について、

$\forall \eta \in \Phi, \forall k \in L,$

(i) $c_k(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k + \eta_\perp) = c_k(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k)$

(ii) $c_k(a \cdot \eta) = a \cdot c_k(\eta)$ for any positive real number a

(iii) $c_k(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k) = c_k(\eta)$

が成り立ち、

(iv) $\forall q \in L, c_k(\psi_q) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } k=q \\ 0 & \text{if } k \neq q \end{cases} .$$

(証明) $\{\psi_k\}_{k\in L}$ は1次独立な系であり、各1次展開係数 $c_k(\eta)$ は、連立1次方程式(3.80)の解であるから、容易に(i)～(iv)の成立を確かめることができる。 □

補助定理3.1から、次の命題3.1が成り立つ。

[命題3.1]式(3.86)の特徴抽出写像 u に関し、次の(i)～(iv)が成り立つ：

$\forall \eta \in \Phi, \forall k \in L,$

(i) (雑音 $\eta_\perp$ の除去性)

$u(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k + \eta_\perp, k) = u(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k, k)$

(ii) $u(a \cdot \eta, k) = u(\eta, k)$ for any positive real number a

(iii) $u(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k, k) = u(\eta, \psi_k)$

(iv) $\forall q \in L, u(\psi_q, k) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } k=q \\ 0 & \text{if } k \neq q. \end{cases}$$

(証明)(i)～(iv)は、補助定理3.1の(i)～(iv)を式(3.85)に代入すると、各々、明らか。 □

命題3.1から、次の命題3.2が成り立つ。

[命題3.2] 式(3.76)のモデル構成作用素 T に関し、次の(i)～(iv)が成り立つ：

$\forall \eta \in \Phi,$

(i)(雑音 $\eta_\perp$ の除去性)

$T(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k + \eta_\perp) = T(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k)$

(ii)(正定数倍についての不変性)

$T(a \cdot \eta) = T\eta$ for any positive real number a

(iii)(パターン $\eta$ の最小自乗近似式(3.81)での主 成分 $\Sigma_{k\in L}\, c_k(\eta) \cdot \psi_k$ のモデル性)

$T(\sum_{k\in L} c_k(\eta) \cdot \psi_k) = T\eta$

(iv)(各パターン形状素 $\psi_q$ のT－不動点性)

$\forall q \in L, T\psi_q = \psi_q$ .

(証明)(i)～(iv)は補助定理3.2の(i)～(iv)を式(3.76)に代入すると、各々、明らか。 □

(定理3.5の証明) axiom 1,(i)～(iv)の成立を確かめよう。

(i)の証明：

$\forall k \in K,\ c_k(\eta_\perp)=0$ ∵ 連立1次方程式(3.80)

∴ $u(\eta_\perp, k)=0$ ∵ 式(3.85)

∴ $T\eta_\perp=0$

を得る。特に、$\eta_\perp=0$ と選ぶことができる。

(ii)の証明：命題3.2の(ii)そのものである。

(iii)の証明：補助定理3.1の(iii)より、

(iii.1) $\forall q \in L,\ c_q(\varphi)=0$ のとき

$\varphi=\varphi_\perp$ であるから、(i)の証明から、$T\varphi=0$

を得る。よって、$\forall q \in L,\ c_q(T\varphi)=0$ を得、同様にして、$TT\varphi=0$. つまり、$TT\varphi=0=T\varphi$.

(iii.1) $\exists q \in L,\ c_q(\varphi)\neq 0$ のとき

連立1次方程式(3.80)の右辺の $\varphi$ として、$T\varphi$ を代入すればわかるように、

$$\forall k \in L,\ c_k(T\varphi)=u(\varphi, k) \tag{3.90}$$

ここに、$\exists q \in L,\ c_q(\varphi)\neq 0$ より、

$$\exists q \in L,\ u(\varphi, k)\neq 0 \tag{3.91}$$

を得る。$u(T\varphi, k)$ を求めよう。

2式(3.90),(3.91)より、

$$\exists k \in L,\ c_k(T\varphi)\neq 0 \tag{3.92}$$

を得て、

$u(T\varphi, k)$

$=c_k(T\varphi)/[\sum_{k\in L} |c_k(T\varphi)|^2]^{1/2}$

∵ 式(3.85),(3.92)

$=u(\varphi, k)/[\sum_{k\in L} |u(\varphi)|^2]^{1/2}$

∵ 2式(3.91),(3.87)より、$\sum_{k\in L} |u(\varphi, k)|^2=1$

$=u(\varphi, k)$

がいえ、よって、T の定義式(3.76)より、

$T(T\varphi)=T\varphi$ .

(iv)の証明：$\psi_q\neq 0$ を考慮すると、命題3.2の(iv)から、明らか。 □

尚、式(3.89)を満たすパターン集合 $\Phi$ は、集合論的方程式(パターン集合を再帰的に定義する**領域方程式**；2.5.1項を参照)

$$\Phi=\Phi_{base} \cup R^{++}\cdot\Phi \cup T\cdot\Phi \tag{3.93}$$

ここに、

$$R^{++}\cdot\Phi \equiv \{a\cdot\varphi \mid a \in R^{++}(\text{正実数全体の集合}),\ \varphi\in\Phi\} \tag{3.94}$$

$$T\cdot\Phi \equiv \{T\varphi \mid \varphi\in\Phi\} \tag{3.95}$$

の解として得られる[84]。$\omega_j \in \mathfrak{H}$ を第 $j\in J$ 番目のカテゴリ $\mathfrak{C}_j$ の代表パターン(プロトタイプ)として、$\Phi_{base}$ は、

$$0\in\Phi_{base}\subset\mathfrak{H} \wedge \{\omega_j \mid j\in J\}\subset\Phi_{base} \wedge \{\psi_k \mid k\in L\}\subset\Phi_{base} \tag{3.96}$$

を満たすパターンのある集合(基礎パターン集合)である。

## 3.5 1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in K}$ に基づく他の2種類のパターンモデル $T\varphi$

文献[83]の4.1節によれば、次の命題3.3が証明されている。

[命題3.3](モデル構成作用素 T の正定数倍構成法) 式(1.1)の写像 T が、条件式(3.89)の下で、2.4節の axiom 1を満たすならば、c を任意の正定数として、写像 c・T も axiom 1を満たす。 □

命題3.3を適用して、興味ある2つのパターンモデルを、次の定理3.6の如く、構成しよう。

[定理3.6](パターンモデルの副構成定理)

式(3.85)とは異なり、連立1次方程式(3.80)の解としての1次展開係数 $c_k(\varphi)$ の組を使って定義される2種類の複素数

① $u(\varphi, k) \equiv$

$$\begin{cases} 0 \cdots \forall q \in L,\ c_q(\varphi)=0 \quad \text{のとき} \\ ck(\varphi) \Big/ \left[\sum_{k\in L} |c_k(\varphi)|\right] \\ \qquad \cdots \exists q \in L,\ c_q(\varphi) \neq 0 \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{3.97}$$

② $u(\varphi, k) \equiv$

$$\begin{cases} 0 \cdots \forall q \in L,\ c_q(\varphi)=0 \quad \text{のとき} \\ c_k(\varphi) \Big/ \left[\sup_{k\in L} |c_k(\varphi)|\right] \\ \qquad \cdots \exists q \in L,\ c_q(\varphi) \neq 0 \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{3.98}$$

を使って得られる2種類の、式(3.86)の特徴抽出写像 u を持ちだし、式(3.76)の如く定義される写像 T も、条件式(3.89)の下で2.4節の axiom 1を満たす。

(証明)

(1) $\forall q \in L,\ c_q(\varphi)=0$ のとき

2.4節, axiom 1の( i ),( ii ),( iii )を満たすことは、容易に確かめられる。

(2) $\exists q \in L,\ c_q(\varphi)$

$$c = \left[\sum_{k\in L} |c_k(\varphi)|^2\right]^{1/2} \Big/ \left[\sum_{k\in L} |c_k(\varphi)|\right] \tag{3.99}$$

$$c = \left[\sum_{k\in L} |c_k(\varphi)|^2\right]^{1/2} \Big/ \left[\sup_{k\in L} |c_k(\varphi)|\right] \tag{3.100}$$

と設定すれば、命題3.3を適用でき、本定理の成立は明らかである。 □

式(3.86)の特徴抽出写像 u として、2式(3.97),(3.98)を採用した場合、式(3.76)の $T\varphi$ は、各々、次のように書ける:

(1◇) $\forall q \in L,\ c_q(\varphi)=0$ のとき

$$T\varphi = 0\ . \tag{3.101}$$

(2◇) $\exists q \in L,\ c_q(\varphi) \neq 0$ のとき

$$T\varphi = \sum_{k\in L} |c_k(\varphi) \Big/ \left[\sum_{k\in L} |c_k(\varphi)|\right] \cdot \psi_k\ . \tag{3.102}$$

$$T\varphi = \sum_{k\in L} |c_k(\varphi) \Big/ \left[\sup_{k\in L} |c_k(\varphi)\right] \cdot \psi_k\ . \tag{3.103}$$

□

## 4. RBF法によるモデル構成作用素 T の構成

本章では、先ず、RBF法が説明され(4.1節)、その後、RBF法に登場したδ超関数の表現について論じ(4.2節)、最後に、RBF法による2つのパターンモデル構成法が研究される(4.3節)。

### 4.1 regularization theory(正則化理論)の1つとしてのRBF法

#### 4.1.1 可分なヒルベルト空間 $L_2(R^n ; dx)$

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ は計量線形空間(metric linear space)、或いは、複素内積空間(complex inner-product space)であり、$\mathfrak{H}$ として、内積$(\varphi, \eta)$が、

$$(\varphi, \eta) \equiv \int_{R^n} dx \ \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{4.1}$$

ここに、$\overline{\eta}$は $\eta$ の複素共役であり、

$$x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \in R^n \ (\text{n次元ユークリッド空間}) \tag{4.2}$$

$$dx = dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \tag{4.3}$$

と与えられる複素ノルム空間(complex normed space) $NS = L_2(R^n ; dx)$を採用しよう。勿論、ノルム $\| \varphi \|$ は、

$$\| \varphi \| \equiv \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{4.4}$$

と定義される。

非負実数量 $\| \varphi - \eta \|$ を $\varphi, \eta \in \mathfrak{H}$ 間の距離(distance between $\varphi$ and $\eta$)と考えることによって、NSは距離空間(metric space)ともなる。

### 4.1.2 構成基本定理に基づくパターンモデル

このとき、1次独立な系

$$\eta_k \equiv \eta_k(x) \equiv g(x ; a(k)), k = 1 \sim N \tag{4.5}$$

を、Gram-Schmidtの直交化法(Gram-Schmidt orthogonalization)

$$\psi_1{}^{\Delta} \equiv \eta_1 \tag{4.6}$$

$$\psi_k{}^{\Delta} \equiv \eta_k - \sum_{\ell=1}^{K-1} (\eta_k, \psi_\ell{}^{\Delta} \| \psi_\ell{}^{\Delta} \|^{-1}) \cdot \psi_\ell{}^{\Delta} \| \psi_\ell{}^{\Delta} \|^{-1} \quad (k = 2 \sim N) \tag{4.7}$$

$$\psi_k \equiv \psi_k{}^{\Delta} \cdot \| \psi_k{}^{\Delta} \|^{-1} \quad (k = 1 \sim N) \tag{4.8}$$

を適用して、

$$(\psi_k, \psi_\ell) = \begin{cases} 1 \cdots k = \ell & \text{のとき} \\ 0 \cdots k \neq \ell & \text{のとき} \end{cases} \tag{4.9}$$

を満たす正規直交系 $\{\psi_k\}_{k=1\sim N}$ を求め、2定理3.5,3.6に従い、3種類のパターンモデル $T\varphi$ を構成出来るが、以下のパターンモデル構成法は、この構成法とは異なるものである。

### 4.1.3 RBF法

文献[95],[9]に従い、正則化理論の1つとしのRBF(radial basis function；動径基底関数)法を説明しよう。

実数データ(入力とそれに対応する出力の対の事例)の集合

$$\{ \langle a(k), b(k) \rangle \mid a(k) \in R^n, b(k) \in R, k = 1 \sim N \}$$

$$\text{ここに、} a(k) = \langle a_1(k), a_2(k), \cdots, a_n(k) \rangle \tag{4.10}$$

が与えられたとき、実数値汎関数

$$F(\psi) \equiv \sum_{k=1}^{N} [b(k) - \psi(a(k))]^2 + \lambda \cdot \| Q\psi \|^2$$

ここに、

Q ：stabilizer (a constraint operator)

$\lambda$ ：a positive real number (a regularization parameter) (4.11)

を最小ならしめる実数値関数

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R \tag{4.12}$$

を決定する手法を与えるのが、正則化理論である。

Euler-Lagrange equations によれば、

$Q^*$：Qの共役作用素[1], [2] (4.13)

として、$F(\psi)$ を最小ならしめる関数 $\psi$ は、

$$(Q^* Q\psi)(x)$$
$$=(1/\lambda)\cdot\sum_{k=1}^{N}[b(k)-\psi(x)]\cdot\delta(x-a(k)) \quad (4.14)$$

と書ける。ここに、

$$(1^\wedge)\ \forall\varphi,\forall\eta,\ (Q\varphi,\eta)=(\varphi,Q^*\eta). \quad (4.15)$$

$(2^\wedge)\ \delta=\delta(x)$ はDiracの超関数(the delta function)であり、

$$\delta(x-a(k))\equiv\delta(x_1-a_1(k))\cdot\delta(x_2-a_2(k))\cdot\cdots\cdot\delta(x_n-a_n(k)) \quad (4.16)$$

と定義され、各 $\delta(x_j-a_j(k))$ は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_j\ \varphi(x)\cdot\delta(x_j-a_j(k))=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},a_j(k),x_{j+1},x_n) \quad (4.17)$$

を満たす。 □

さて、超関数論的方程式(distributional equation)

$$(Q^* Q g)(x;y)=\delta(x-y) \quad (4.18)$$

と書ける $Q^* Q$ のグリーン関数(the Green's function of $Q^* Q$) g を導入する。

2式(4.14),(4.18)を考慮すれば、

$$(Q^* Q\psi^\circ)(x)=0 \quad (4.19)$$

を満たすある関数 $\psi^\circ(x)$ が存在して、$\psi(x)$ が、

$$\psi(x)=(1/\lambda)\cdot\sum_{k=1}^{N}[b(k)-\psi(a(k))]\cdot g(x;a(k))+\psi^\circ(x) \quad (4.20)$$

と書けることが導かれる。

先ず、

$$c_k\equiv(1/\lambda)\cdot[b(k)-\psi(a(k))],\ k=1\sim N \quad (4.21)$$

とおくと、式(4.20)は、

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k\cdot g(x;a(k))+\psi^\circ(x) \quad (4.22)$$

と書けることに注意する。

式(4.22)内に登場している式(4.21)の未定係数 $c_k$ を求めよう。

[定理4.1] **(RBF法による実関数表現定理)**

式(4.11)の汎関数 $F(\psi)$ を最小ならしめる関数 $\psi=\psi(x)$ は、方程式(4.18)の解 g を用いて、条件式(4.23)の下で、式(4.24)のように表され、然も、式(4.24)の関数 $\psi(x)$ 内の1次結合係数 $c_k$ は、連立1次方程式(4.31)を解いて得られ、このとき、汎関数 $F(\psi)$ の最小値は、式(4.33)の様に求められる。 □

式(4.21)で示される式(4.22)内の未定係数 $c_k$ を求めよう。

もし、関数 $\psi^\circ(x)$ が、

$$\psi^\circ(a(j))=0,\ j=1\sim N \quad (4.23)$$

を満たしていれば、式(4.22)から、

$$\psi(a(j))=\sum_{\ell=1}^{N}c_\ell\cdot g(a(j);a(\ell)),\ j=1\sim N \quad (4.24)$$

が成り立つことに、注意する。

以後、条件式(4.23)の下で成り立つ表現式

$$\psi(x)=\sum_{\ell=1}^{N}c_\ell\cdot g(x;a(\ell)) \quad (4.25)$$

を考える。

さて、式(4.21)から得られる等式

$\lambda \cdot c_k + \psi(a(k)) = b(k), k=1\sim N$ (4.26)

に注意すれば、この式(4.26)に式(4.24)を代入すれば、条件式(4.23)の下で、

$\sum_{\ell=1}^{N} g(a(k);a(\ell)) \cdot c_\ell + \lambda \cdot c_k = b(k), k=1\sim N$ (4.27)

が得られる。

$\underline{b} = \mathrm{col}(b(1)\ b(2)\cdots b(N))$ (列ベクトル) (4.28)

$\underline{c} = \mathrm{col}(c(1)\ c(2)\cdots c(N))$ (4.29)

として、行列

$G = (g_{k\ell})_{1\leq k,\ \ell\leq N}$ (4.30)

ここに、$g_{k\ell} \equiv g(a(k);a(\ell))$ (4.31)

を導入すれば、式(4.27)は、

$(G+\lambda I)\underline{c} = \underline{b}$

ここに、Ｉは単位行列(the identity matrix) (4.32)

と書ける。この連立1次方程式(4.32)が、a set of equations for unknown coefficients $c_k$である。

式(4.14)から、

$\| Q\psi \|^2 = (Q\psi, Q\psi) = (\psi, Q^* Q\psi)$

$= (1/\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{N} \{\psi, [b(k) - \psi(x)]\,\delta(x-a(k))$

$\because$ 式(4.14)

$= (1/\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{N} [b(k) - \psi(a(k))] \cdot \psi(a(k))$ (4.33)

つまり、

$\lambda \cdot \| Q\psi \|^2 = \cdot \sum_{k=1}^{N} \overline{[b(k) - \psi(a(k))]} \cdot \psi(a(k))$

$\because$ $b(k) - \psi(a(k))$ は実数 (4.34)

であることに注意し、式(4.21)から、

$b(k) - \psi(a(k)) = \lambda \cdot c_k$ (4.35)

に注意すると、式(4.11)で表される$F(\psi)$の最小値 は、条件式(4.23)の下で、

$\min_\psi F(\psi)$

$= \sum_{k=1}^{N} \lambda^2 \cdot c_k^2 + \sum_{k=1}^{N} [b(k) - \psi(a(k))] \cdot \psi(a(k))$ (4.36)

と与えられる。ここに、各係数$c_k$は連立1次方程式(4.31)の解である。

## 4.2 δ超関数について

### 4.2.1 グリーン関数

文献[98]の第6章によれば、次のⅠ～Ⅲが成り立つ。

Ⅰ. 内積 $(\varphi, \eta)$ が

$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x)$

のとき、

$g(x) =$

$\begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ x & \text{if } x\geqq 0 \end{cases}$

に対し、

$(d^2/dx^2)\,g(x) = \delta(x)$, つまり、

$(d^2/dx^2)\,g(x-y) = \delta(x-y)$

が成り立つ。ここに、$d^2/dx^2$ は1次元のラプラシアンである。$g(x)$ はグリーン関数である。

式(5.18)との対応では、

$$Q^* = -Q$$

が成り立つ意味で、

$$Q = \sqrt{-1}\ \sqrt{-1}^{-1} d/dx = d/dx$$

は反自己共役作用素であり、

$$Q^* Q = d^2/dx^2$$

である。

Ⅱ. 内積 $(\varphi, \eta)$ が

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\ \varphi(x_1, x_2) \cdot \eta(x_1, x_2)$$

のとき、2次元のラプラシアン

$$\Delta_{(x)} = \sum_{j=1}^{2} \partial^2 / \partial xj^2$$

についての、式(5.18)に対応する方程式

$(\Delta_{(x)} g)(x) = \delta(x)$,つまり、

$(\Delta_{(x)} g)(x-y) = \delta(x-y)$

を満たすグリーン関数 $g(x)$ は、

$$g(x) = (2\pi)^{-1} \cdot \log_e |x|$$

である。ここに、

$$|x| = [\sum_{j=1}^{2} x_j^2]^{1/2}.$$

Ⅲ. 内積 $(\varphi, \eta)$ が

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n$$

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \overline{\eta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (n \geqq 3)$$

のとき、2次元のラプラシアン

$$\Delta_{(x)} = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 / \partial xj^2 \qquad (n \geqq 3)$$

ここに、

$$x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$$

についての、式(5.18)に対応する方程式

$(\Delta_{(x)} g)(x) = \delta(x)$,つまり、

$(\Delta_{(x)} g)(x-y) = \delta(x-y)$

を満たすグリーン関数 $g(x)$ は、

$$g(x) = [(2-n \cdot \Omega_{n-1}] \cdot |x|^{2-n}$$

ここに、

$$|x| = [\sum_{j=1}^{n} x_j^2]^{1/2}$$

$\Omega_{n-1} = 2(\sqrt{\pi})^n / \Gamma(n/2)$ (原点を中心とした半径1の球の表面積).

因みに、登場したガンマー関数(gamma function, Γ-function) $\Gamma(\alpha)$ を、文献[99]の p.38(2.2節)に従って説明しておこう。

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} dx\ x^{\alpha-1}\ e^{-x}$$

$$= \lim_{A \to 0, \varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{A} dx\ x^{\alpha-1}\ e^{-x} \qquad (\alpha > 0)$$

は、関数方程式

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha) \qquad (\alpha>0)$$

を満たす。

[性質1]n=1,2,3,… とすれば、

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

[性質2]

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

[性質3]n=1,2,3,… とすれば、

$$\Gamma(n/2)\cdot\Gamma((n+1)/2)=2^{1-n}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n).$$

### 4.2.2 完全正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in 1,2,\dots}$ による$\delta$超関数の表現

可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}=L_2(R^n;dx)$ における任意の完全正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in 1,2,\dots}$ を用意する。フーリェ式直交展開

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\psi_k)\cdot\psi_k(x) \text{ for any } x\in M$$

が成り立つから、この式を変形して、

$$\varphi(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ \varphi(y)\cdot\psi_k(y)\right]\cdot\psi_k(x)$$

ここに、$x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ \varphi(y)\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\psi_k(x)\cdot\psi_k(y)$$

が得られるから、$\delta$超関数の、完全正規直交系 $\{\psi_k\}_{k\in 1,2,\dots}$ による表現

$$\delta(x;y)(\equiv\delta(x-y))\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\cdot\psi_k(y)$$

が得られる。

### 4.2.3 極限による$\delta$超関数の表現

文献[100]の第1章、§2,5,pp.35−38 によれば、$\delta$超関数の表現として、次の3表現が指摘されている。

[表現1] $0<\varepsilon<\infty$ として、

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}(1/\pi)\cdot\varepsilon/(x^2+\varepsilon^2).$$

[表現2] $0<t<\infty$ として、

$$\delta(x)=\lim_{t\to 0}(1/\sqrt{2\pi t})\cdot\exp[-x^2/(2t)].$$

[表現3] $0<\nu<\infty$ として、

$$\delta(x)=\lim_{\nu\to\infty}(1/\pi)\cdot\sin(\nu x)/x.$$

## 4.3 モデル構成作用素 T の構成

前節の定理4.1を適用して、2.4節の axiom 1を満たすパターンモデル $T\varphi$ を構成しよう。

### 4.3.1 動作領域 Φ とモデル構成作用素 T

包含関係

$$\Phi\subset NS\equiv\{\varphi\mid[\forall x\in R^n,\varphi(x)\in Z(\text{複素数体; complex number field})]$$
$$\wedge\int_{R^n}dx\ |\varphi(x)|^2|<\infty\} \tag{4.37}$$

を満たす Φ が、パターン情報システムが処理対象とするパターン $\varphi$ の集合(**動作領域**;operating region)といわれるためには、Φ と式(1.1)の写像 T:Φ → Φ と Φ との対[Φ, T]は2.4節の axiom 1を満たさな

ければならない。このとき、T は**モデル構成作用素**といわれる。

### 4.3.2 モデル構成定理

実は、式(4.25)の $\psi$ (x)は式(4.37)の補間条件式を満たすある実数値関数 $\varphi$ (x)の、

the tradeoff between enforcing the smoothness constraint and fitting the known data

を考慮した近似である[9]。この近似を考慮すると、次のパターンモデル構成定理(定理4.1)が得られる。

[定理4.1] **(regularization theory に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成定理1)**

連立1次方程式(4.32)の解 $\underline{c}$ を持つ条件式(4.23)の下での、式(4.25)の $\psi$(x) について、補間条件

$$\varphi(a(k)) = \psi(a(k)) \text{ for any } k \in \{1, 2, \cdots, N\} \tag{4.38}$$

を満たすパターン $\varphi = \varphi(x) \in \Phi$ に対し、条件式(3.89)の下で、

$$(T\varphi)(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} [c_k / \sup_\ell | c_\ell | ] \cdot \psi_k(x) \tag{4.39}$$

$$\text{ここに、} \psi_k \equiv \psi_k(x) \equiv g(x ; a(k)) \tag{4.40}$$

と定義される式(1.1)の写像 T は、axiom 1を満たすモデル構成作用素である。ここに、

$$c_k / \sup_\ell | c_\ell | = 0 \text{ if } \sup_\ell | c_\ell | = 0 \tag{4.41}$$

と解釈する。

同時に、次の①,②,③が成立している：

① $\forall_k \in \{1, 2, \cdots, N\}, T\psi_k = \psi_k$ .

② $\forall_k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \varphi(a(k))$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell \cdot g(a(k) ; a(\ell)) \tag{4.42}$$

$\wedge$ $(T\varphi)(a(k))$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} [c_\ell / \sup_m | c_m | ] \cdot g(a(k) ; a(\ell)) . \tag{4.43}$$

$$\text{③ } \forall_k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \varphi(a(k)) = 0 \tag{4.44}$$

$$\Rightarrow T\varphi = 0 . \tag{4.45}$$

が成り立っている。

(①の証明) $\varphi$ として、任意に、ある1つの $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ を選定し、式(4.39)の $\psi_k \equiv \psi_k(x)$ を選ぶ。このとき、式(4.24)から、

$$c_k = 1 \quad \wedge \quad [\forall \ell \in \{1, 2, \cdots, N\} - \{k\}, c_\ell = 0] \tag{4.46}$$

を得、式(4.39)から、

$$T\varphi = \psi_k \neq 0 \tag{4.47}$$

が成り立ち、証明が終わった。同時に、2.4節の axiom 1の(iv)の成立が示された。 □

(②の証明) $\forall_k \in \{1, 2, \cdots, N\}$,

$\varphi(a(k)) = \psi(a(k))$ for $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$

$$\because \text{ 補間条件式(4.38)} \tag{4.48}$$

$= \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell \cdot g(a(k) ; a(\ell))$

$$\because \text{ 式(4.24)} \tag{4.49}$$

が成り立っているが、同時に、

$(T\varphi)(a(k))$

$\equiv \sum_{\ell=1}^{N} [c_\ell / \sup_m | c_m | ] \cdot g(a(k) ; a(\ell))$

$$\because \text{ 2式(4.39),(4.40)} \tag{4.50}$$

を得、②の証明が終わった。 □

（③の証明）

式(4.44)の成立

$\Rightarrow \forall \ell \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_\ell = 0$

$\because$ 式(4.30)の行列Gの行列式が非零であることを、式(4.42)に考慮すればよい (4.51)

$\Rightarrow T\varphi = 0 \quad \because$ 式(4.39) (4.52)

を得、証明が終わった。 □

（定理4.1の証明） ①において、2.4節のaxiom 1,(iv)の成立が示されている。残りの、2.4節のaxiom 1の(i)～(iii)を満たすことを示す。

(i) $\varphi = 0$ のとき

式(4.44)が成り立ち、③を適用して、$T\varphi = 0$ が得られる。

(ii) a を正実数とする。

$\varphi' \equiv a \cdot \varphi$ とおく。

$\varphi$ に対応する $c_k, \psi$ を、$\varphi'$ に対応し、各々、$c_k', \psi'$ と書く。

(ii−1) $\forall_k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \varphi(a(k)) = 0$ (4.53)

が成り立つとき

明らかに、

$\varphi'(a(k)) = 0$ for any $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ (4.54)

が成り立つ。

補間条件式(4.38)から、

$a \cdot \varphi(a(k)) = a \cdot \psi(a(k))$ for any $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ (4.55)

が成り立つから、

$\psi'(a(k)) = 0$ for $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ (4.56)

とが成り立つ。よって、(i)と同様にして、

$T\varphi' = 0 = T\varphi$ (4.57)

を得、証明が終わった。

(ii−2) $\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \varphi(a(k)) \neq 0$ (4.58)

が成り立つとき

式(4.30)の行列Gの行列式が非零であることを、式(4.42)に考慮すれば、

$\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k \neq 0$ (4.59)

が成り立つ。

式(4.42)が成り立っているから、式(4.26)から、

$\lambda \cdot a \cdot c_k + a \cdot \psi(a(k)) = a \cdot b(k), k = 1 \sim N$ (4.60)

がいえ、よって、

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k' = a \cdot c_k$ (4.61)

$\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k' \neq 0$ (4.62)

を得、式(4.25)から、

$$\psi'(x) = \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell' \cdot g(x; a(\ell)) \quad (4.63)$$

$$= a \cdot \psi(x) \quad (4.64)$$

を得、

$(T\varphi')(x)$

$$=\sum_{k=1}^{N}[c_k'/\sup_\ell|c_\ell'|]\cdot\psi_k(x)$$

$$\because\ 式(4.39) \tag{4.65}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}[a\cdot c_k/\sup_\ell|a\cdot c_\ell|]\cdot\psi_k(x)$$

$$\because\ 式(4.61) \tag{4.66}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}[c_k/\sup_\ell|c_\ell|]\cdot\psi_k(x)$$

$$=(T\varphi)(x)\qquad\because\ 式(4.39) \tag{4.67}$$

を得て、証明が終わった。

(iii) $\varphi'\equiv T\varphi$ とおく。

$\psi$ は式(4.25)で表されており、補間条件式(4.38)を満たす $\varphi$ に対応する $c_k$ を、$\varphi'$ に対応し、$c_k'$ と書く。$\varphi'$ に対応する $\psi'$ は、

$$\psi'(x)$$

$$=\sum_{\ell=1}^{N}c_\ell'\cdot g(x;a(\ell)) \tag{4.68}$$

と表され、$\varphi'$ は、補間条件式

$$\varphi'(a(k))=\psi'(a(k))\ \text{for any}\ k\in\{1,2,\cdots,N\} \tag{4.69}$$

を満たしているものである。列ベクトル

$$c'=\mathrm{col}\,(c_1'\ \ c_2'\cdots c_N') \tag{4.70}$$

は、3式(4.24),(4.26),(4.32)に対応して、

$$\psi'(a(k))$$

$$=\sum_{\ell=1}^{N}c_\ell'\cdot g(a(k);a(\ell)),\ k=1\sim N \tag{4.71}$$

$$\lambda\cdot c_k'+\psi'(a(k))=b'(k),\ k=1\sim N \tag{4.72}$$

$$(G+\lambda I)\underline{c'}=\underline{b'} \tag{4.73}$$

ここに、

$$b'(k)=b(k) \tag{4.74}$$

$$b'=\mathrm{col}\,(c_1'\ \ c_2'\cdots c_N') \tag{4.75}$$

を共に、満たすものである。このとき、パターンモデル $T\varphi'$ は、

$$(T\varphi')(x)=\psi'(x)/\sup_\ell|c_\ell'|=$$

$$\begin{cases}0 & \cdots\ \sup_\ell|c_\ell'|=0\ \ のとき\\ \sum_{k=1}^{N}[c_k'/\sup_\ell|c_\ell'|]\cdot\psi_k(x) & \\ \qquad\cdots\ \sup_\ell|c_\ell'|>0\ \ のとき\end{cases} \tag{4.76}$$

と、表現される。

$$(\text{iii}-1)\ \forall k\in\{1,2,\cdots,N\},\ \varphi'(a(k))=0 \tag{4.77}$$

が成り立つとき

式(4.30)の行列Gの行列式が非零であることを、2式(4.69),(4.71)に考慮すれば、

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,N\},\ c_k'=0 \tag{4.78}$$

を得て、式(4.76)より、

$$T\varphi'=0 \tag{4.79}$$

が成り立つ。一方、式(4.77)より、

$$0=\varphi'(a(k))=(T\varphi)(a(k))$$

$$=\sum_{\ell=1}^{N}[c_\ell/\sup_m|c_m|]\cdot g(a(k);a(\ell))$$

$$\text{for any}\ k\in\{1,2,\cdots,N\}\qquad\because\ 式(4.43) \tag{4.80}$$

より、

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k / \sup_m |c_m| = 0$

$\therefore \quad \forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k = 0$ (4.81)

$\therefore \quad T\varphi = 0 \qquad \because$ 式(4.39) (4.82)

を得、結局、

$TT\varphi = T\varphi' = 0 = T\varphi = 0$ (4.83)

を得、証明が終わった。

(iii−2) $\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \varphi'(a(k)) \neq 0$ (4.84)

が成り立つとき、

式(4.30)の行列 G の行列式が非零であることを、2式(4.69),(4.71)に考慮すれば、

$\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k' \neq 0$ (4.85)

を得て、このとき、式(4.76)より、パターンモデル

$T\varphi'$ は、

$(T\varphi')(x) = \psi'(x) / \sup_\ell |c_\ell'| =$

$= \sum_{k=1}^{N} [c_k' / \sup_\ell |c_\ell'|] \cdot \psi_k(x)$ (4.86)

と、表される。

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k = 0$

を仮定すると、

$\varphi'(x) \equiv (T\varphi)(x) = 0$

を得るが、これは、式(4.84)に矛盾するから、

$\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k \neq 0$ (4.87)

でなければならない。

よって、式(4.39)より、

$\varphi'(x) \equiv (T\varphi)(x)$

$= \sum_{k=1}^{N} [c_k / \sup_\ell |c_\ell|] \cdot \psi_k(x)$ (4.88)

$= \varphi'(x) / \sup_\ell |c_\ell|$

であるが、2式(4.68),(4.88)において、その変数 x に各 a(j) (j=1〜N) を代入した後、式(4.69)を考慮すれば、

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k' = c_k / \sup_\ell |c_\ell|$ (4.89)

$\because$ 式(4.40)の系 $\psi_k(x)$ の系 $\{\psi_k\}_{k=1\sim N}$ の1次独立性

が成立することがわかる。

2式(4.89),(4.87)から、

$\exists k \in \{1, 2, \cdots, N\}, c_k' = c_k / \sup_\ell |c_\ell| \neq 0$ (4.90)

がいえ、よって、

$\sup_\ell |c_\ell'| = 1$ (4.91)

が成り立つ。それ故、

$(T(T\varphi))(x) = (T\varphi')(x)$

$= \sum_{k=1}^{N} [c_k' / \sup_\ell |c_\ell'|] \cdot \psi_k(x)$

$\because$ 式(4.86)

$$=\sum_{k=1}^{N} c_k' \cdot \psi_k(x) \qquad \because \text{ 式}(4.91)$$
$$=\sum_{k=1}^{N} [c_k / \sup_\ell |c_\ell|] \cdot \psi_k(x) \qquad \because \text{ 式}(4.90)$$
$$=(T\varphi')(x) \tag{4.92}$$
を得、証明が終わった。 □

上述の定理4.1に3.5節の命題3.3を適用して、次の定理4.2を定理3.5と同様に証明でき、RBF法により、結局、3種類のパターンモデル $T\varphi$ が得られたことになる。

[定理4.2] (**regularization theory に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成定理 2**)

連立1次方程式(4.32)の解 $\underline{c}$ を持つ条件式(4.23)の下での、式(4.25)の $\psi=\psi(x)\in\Phi$ について、補間条件式(4.38)を満たすパターン $\varphi=\varphi(x)\in\Phi$ に対し、条件式(3.89)の下で、

$$(T\varphi)(x)\equiv\sum_{k=1}^{N}[c_k/[\sum_{k\in L}|c_\ell|^2]^{1/2}]\cdot\psi_k(x) \tag{4.93}$$
$$(T\varphi)(x)\equiv\sum_{k=1}^{N}[c_k/\sum_{k\in L}|c_\ell|]\cdot\psi_k(x) \tag{4.94}$$

と定義される式(1.1)の写像 T は、axiom 1を満たすモデル構成作用素である。ここに、

$$\forall\ell\in L, c_\ell=0\Rightarrow c_k/[\sum_{k\in L}|c_\ell|^2]^{1/2}=0 \tag{4.95}$$
$$\forall\ell\in L, c_\ell=0\Rightarrow c_k/\sum_{k\in L}|c_\ell|=0 \tag{4.96}$$

と解釈する。 □

## 5. wavelet理論によるモデル構成作用素 T の構成

本章では、先ず、直交 wavelets 離散展開における階層近似が説明され(5.1節)、その後、階層近似に対応したパターンモデル $T\varphi$ が定理3.5を適用して、構成される(5.2節)。

### 5.1 階層的近似

離散的なパラメータ $\tau$, a を持つ wavelet transform

$$WT(\tau,a)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ q_{\tau,a}(t)\varphi(t) \tag{5.1}$$

ここに、

$$q_{\tau,a}(t)\equiv(1/\sqrt{a})\cdot q(a^{-1}\cdot(t-\tau)) \tag{5.2}$$

を利用して、wavelet 展開式

$$\varphi(t)=\Sigma_a\ \Sigma_\tau\ WT(\tau,a)\cdot q_{\tau,a}(t) \tag{5.3}$$

がなり立つ十分条件は、直交関係

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ q_{\tau,a}(t)q_{\tau',a'}(t)= \begin{cases} 0\cdots \tau\neq\tau' \vee a\neq a' & \text{のとき} \\ 1\cdots \tau=\tau' \wedge a=a' & \text{のとき} \end{cases} \tag{5.4}$$

である。ここに、

(イ通) the location of a change in $\varphi$ (t) in terms of a position parameter $\tau$

(ロ) the rate of change in $\varphi$ (t) in terms of a span parameter a

(ハ) the amount of this change in terms of $WT(\tau, a)$

を考慮しておく必要がある[9]。

2つのparameter a , $\tau$ を、

$$a=1/2^{k} \tag{5.5}$$
$$\tau=\ell\cdot a \tag{5.6}$$
と選ぶと、式(5.2)の $q_{\tau,a}(t)$ は、
$$q_{\tau,a}(t)=2^{k/2}\cdot q(2^{-k}\cdot t-\ell) \tag{5.7}$$
となり、2式(5.1), (5.3)は、各々、
$$WT(\ell/2^{k},1/2^{k}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ 2^{k/2}\ q(2^{-k}\ t-\ell)\varphi(t) \tag{5.8}$$
$$\varphi(t) =\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} WT(\ell/2^{k},1/2^{k})\cdot 2^{k/2}\cdot q(2^{-k}\cdot t-\ell) \tag{5.9}$$
と再表現される。

関数 $q(t)$ はmother-wavelet といわれ、例えば、Harr関数
$$q(t)= \begin{cases} +1 & \text{if}\quad 0\leqq x<2^{-1} \\ -1 & \text{if}\quad 2^{-1}\leqq x<1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.10}$$
を選ぶことができる。

式(5.8)において、k を固定して得られる部分和
$$\varphi_{k}(t) \equiv\sum_{\ell=+\infty}^{+\infty} WT(\ell/2^{k},1/2^{k})\cdot 2^{k/2}\cdot q(2^{-k}\cdot t-\ell) \tag{5.11}$$
を、第k階層における $\varphi$ の近似(the k-th multi-resolution approximation)という。

以上を一般化したのが、

直交関係式(5.4)を満たす直交 wavelets $\{q\tau, a\}$ を見つけるための、一般的枠組としての多重解像度解 析(multiresolution analysis)[91]

である。

## 5.2 階層的近似に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成

第k階層における $\varphi$ の近似については、直交関係式(5.4)が成り立っているから、
$$\|\varphi(t)-\varphi_{k}(t)\|\rightarrow \min \tag{5.12}$$
ならしめる各係数 $w_{k,\ell}$ は
$$w_{k,\ell}=WT(\ell/2^{k},1/2^{k}) \tag{5.13}$$
である。勿論、階層番号 k につき総和を取ると、
$$\|\varphi(t)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k}(t)\|\rightarrow \min \tag{5.14}$$
をもならしめている。

このとき、2式(5.8), (5.9)に注目すると、定理3.5を適用して、次の定理5.1が成り立ち、条件式(5.16)の下で、式(5.15)のパターンモデル $T\varphi$ が得られた。

**[定理5.1] (wavelets theory に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成定理)**

4つの非負整数 m1, m2, n1, n2 を選定し、固定する。

式(5.9)の $\varphi=\varphi(t)\in\Phi$ について、
$$(T\varphi)(x) \equiv\sum_{k=-m1}^{+m2}\sum_{\ell=-n1}^{+n2}[WT(\ell/2^{k},1/2^{k})/\sum_{k=-m1}^{+m2}\sum_{\ell=-n1}^{+n2}|WT(\ell/2^{k},1/2^{k})|^{2}]$$

$$\cdot 2^{k/2} \cdot q(2^{-k} \cdot t - \ell) \tag{5.15}$$

と定義される式(1.1)の写像Tは、axiom 1を満たすモデル構成作用素である。ここに、条件式(3.89)は満たされているとされており、また、

$$\begin{aligned} &WT(\ell/2^k, 1/2^k) \\ &/\sum_{k=-m1}^{+m2} \sum_{\ell=-n1}^{+n2} |WT(\ell/2^k, 1/2^k)|^2 = 0 \\ &\text{if } \sum_{k=-m1}^{+m2} \sum_{\ell=-n1}^{+n2} |WT(\ell/2^k, 1/2^k)|^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

と解釈する。 □

## 6. 階層形ニューラルネットの近似能力

wavelet展開式(5.9)に代表されるパターン展開に対応して、確保された式(3.76)のパターンモデル$T\varphi$が階層形の3層ニューラルネットの出力形式と解釈されることは既に、説明されている[82]。式(4.25)の、RBF法によるパターン展開に対応して、確保された式(3.76)のパターンモデル$T\varphi$も、同様に解釈される。

このような3層ニューラルネットの近似能力については、研究が進んでおり、本章では、その1成果[8]について、説明しておこう。

$$C[a,b]：1\text{次元閉区間}[a,b] \equiv \{x \mid a \leqq x \leqq b\}\text{で連続な関数}f(x)\text{の集合} \tag{6.1}$$

を導入し、その元$f \in C[a,b]$のノルム

$$\| f \|_{c[a,b]} \equiv \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \tag{6.2}$$

を考えておく。

A set U in $C[a,b]$ is called compact if for any sequence $f_n \in U$,there exists a functions f in U and a subsequence $f_{n(k)}$ of $f_n$, such that $\| f - f_{n(k)} \|_{c[a,b]} \rightarrow 0$ .

次の定理6.1は、

a neural network with one hidden layer feed-forward

による関数$f \in C[a,b]$ の近似を与えている。

[定理6.1] **(neural network representation capability theorem)**

Uを、$C[a,b]$の1つのコンパクト集合(a compact set in $C[a,b]$)とする。

$f=f(x)$をU上で定義された任意の連続汎関数(a continuous functional defined on U)とする。

実関数$\sigma(x)$を、

$$\sigma(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{as } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{as } x \rightarrow -\infty \end{cases} \tag{6.2}$$

を満たすa bounded generalized sigmoidal functionとする。

このとき、任意に与えられた整数$\varepsilon > 0$に対し、

$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \\ &\left| f(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \sigma\left(\sum_{j=0}^{m} \xi_{i,j} \cdot u(x_j) + \theta_i\right) \right| < \varepsilon \end{aligned} \tag{6.3}$$

であるような、

$$m+1 \text{ points } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \tag{6.4}$$

a positive integer N (6.5)

constants $c_i, \theta_i, \xi_{i,j}$ $(i=1, 2, \cdots, N; j=0, 1, 2, \cdots, m)$ (6.6)

が存在する。ここに、$u(x_j)$は、

the value of u evaluated at point $x_j$

である。 □

不等式(6.3)内の関数

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \sigma\left(\sum_{j=0}^{m} \xi_{i,j} \cdot u(x_j) + \theta_i\right) \tag{6.7}$$

は3層ニューラルネットであり、不等式(6.3)は関数 f(x) が十分な精度で近似され得る事実を指摘しているのである。

## 7. 1次独立な系、直交系 $\{\psi_k\}_{k\in K}$ の選定

本章では、

pixelwise orthogonalization, 3角関数系,標本化 関数系, Walsh 直交系,区分的3多項式直交系, spline 関数系, Legendre polynomials[25], Zernike moment[26], Hough 変換法

が説明される。

### 7.1 pixelwise orthogonalization

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}=L_2(M; dm)$ を選んでいるとき、分割条件

$$M_k \cap M_\ell = \phi \ (k \neq \ell) \tag{7.1}$$

を満たす点 $x \in M_\ell \subset M$ からなる非零可測部分集合 M(picture element or pixel)の系 $\{M_\ell\}_{\ell \in L}$ を導入すると、

$$\psi_\ell(x) = 1 \ \text{if} \ x \in M_\ell, \ = 0 \ \text{otherwise} \tag{7.2}$$

と定義された $\{\psi_\ell\}_{\ell \in L}$ は、

$$(\psi_k, \psi_\ell) = \begin{cases} \int_{M_k} dm(x) & \text{if } k=\ell \\ 0 & \text{if } k \neq \ell \end{cases} \tag{7.3}$$

を満たす直交系である。

処理対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について、式(3.84)の $c_k(\varphi)$は、

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) &\equiv (\varphi, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k) \\ &= \int_{M_k} dm(x)\varphi(x) / \int_{M_k} dm(x) \end{aligned} \tag{7.4}$$

と表されるから、定理3.5でのモデル構成写像 $T: \Phi \to \Phi$ は、点 $x \in M_\ell$ においてパターン $\varphi = \varphi(x)$ の第 $\ell \in L$ 番目の pixel $M_\ell$ の平均強度情報(average representative intensity)を抽出する性質を持つ(pixelwise processing)。

### 7.2 3角関数系

2つのパターン $\varphi(x), \psi(x)$ $(0 < x \leqq 2\pi)$ に関する内積 $(\varphi, \eta)$が、

$$\begin{aligned} &(\varphi, \eta) \\ &= (2N)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{2N} \varphi(x_k) \cdot \eta(x_k) \\ &\text{ここに、} x_k = k \cdot (2\pi / (2N)) \quad (k=1, 2, \cdots, 2N) \end{aligned} \tag{7.5}$$

と表されるHilbert 空間 $\mathfrak{H}=L_2(M;dm)$ を導入する。Nは固定された正整数である。
可測集合Mと正値測度dmは、

$$M=\{x \mid 0<x\leqq 2\pi\} \tag{7.6}$$

$$dm(x)= \begin{cases} (2N)^{-1} \cdots x=x_k & \text{のとき} \\ 0 \quad \cdots x\neq x & \text{のとき} \end{cases} \tag{7.7}$$

であることに注意する。勿論、

$$\forall k\in\{k=1,2,\cdots,2N\},\ \varphi(x_k)=0 \Leftrightarrow \|\varphi\|=0 \tag{7.8}$$

であることにも、留意しておく。

$$L\equiv\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-1)\} \tag{7.9}$$

として、

$$\psi_0(x)=1 \tag{7.10}$$

$$\psi_\ell(x)=\sqrt{2}\cdot\cos(\ell x) \quad (1\leqq\ell\leqq N-1) \tag{7.11}$$

$$\psi_\ell(x)=\sqrt{2}\cdot\sin(-\ell x) \quad (-1\geqq\ell\geqq-(N-1)) \tag{7.12}$$

と定義される関数系 $\{\psi_\ell\}_{\ell\in L}$ は完全正規直交系である。
処理対象とするパターン $\varphi\in\Phi\subset\mathfrak{H}$ について、式(3.：84)の $c_k(\varphi)$ は、

$$c_k(\varphi)\equiv(\varphi,\psi_k)/(\psi_k,\psi_k) = \sum_{\ell=1}^{2N}\varphi(x_\ell)\cdot\psi_k(x_\ell) \Big/ \sum_{\ell=1}^{2N}\psi_k(x_\ell)\cdot\psi_k(x_\ell) \tag{7.13}$$

と表されるから、定理3.5でのモデル構成作用素 $T:\Phi\to\Phi$ は、

reconstruction of the original pattern from the sampled values

を提供する。

## 7.3 標本化関数系

内積 $(\varphi,\eta)$ が

$$(\varphi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\varphi(x,y)\cdot\overline{\eta}(x,y) \tag{7.14}$$

と与えられる Hilbert 空間 $\mathfrak{H}=L_2(R^2;dxdy)$ において、

$$\psi_{k\ell}(x,y) \equiv (2\pi)^{-1}\cdot\int_{(k-1)\cdot\Delta\lambda\leqq|\lambda|<k\cdot\Delta\lambda} d\lambda\,\exp[+i\lambda x] \cdot(2\pi)^{-1}\int_{(\ell-1)\cdot\Delta\mu\leqq|\mu|<\ell\cdot\Delta\mu} d\mu\,\exp[+i\mu y] \tag{7.15}$$

ここに、$i\equiv\sqrt{-1}$ であり、また、M, N を十分大きい正整数として、

$$\Delta\lambda\equiv2\pi V/M,\ \Delta\mu\equiv2\pi W/N\ (V,W>0) \tag{7.16}$$

と定義される関数系 $\{\psi_{k\ell}\}_{k\ell}$ は、

$$(\psi_{k\ell},\psi_{mn})= \begin{cases} (\Delta\lambda/\pi)\cdot(\Delta\mu/\pi) & \text{if } k=m \wedge \ell=n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.17}$$

を満たし、直交関数系である。関数

$$\mathrm{sinc}(u) \equiv (\pi u)^{-1} \cdot \sin(\pi u) \tag{7.18}$$

を導入すると、$\psi_{k\ell}$ は具体的に、

$$\begin{aligned}
&\psi_{k\ell}(x, y) \\
&= [(k \cdot \Delta\lambda / \pi) \cdot \mathrm{sinc}(k \cdot \Delta\lambda \cdot x / \pi) \\
&- ((k-1) \cdot \Delta\lambda / \pi) \cdot \mathrm{sinc}((k-1) \cdot \Delta\lambda \cdot x / \pi)] \\
&\cdot [(\ell \cdot \Delta\mu / \pi) \cdot \mathrm{sinc}(\ell \cdot \Delta\mu \cdot y / \pi) \\
&- ((\ell-1) \cdot \Delta\mu / \pi) \cdot \mathrm{sinc}((\ell-1) \cdot \Delta\mu \cdot y / \pi)] \\
&k \in \{0, 1, \cdots, M\},\ \ell \in \{0, 1, \cdots, M\}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

と表される。

処理対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について、式(3.84)の $c_k(\varphi) \equiv (\varphi, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k)$ の分子は、$\Delta\lambda, \Delta\mu > 0$ を十分小さく選んでいれば、簡単な計算から、次の式(7.20)のように、近似表現されることがわかり、

$(k-1/2) \cdot \Delta\lambda,\ (\ell-1/2) \cdot \Delta\mu$ 付近の角周波数成分

(a textured representative-intensity ,i.e.,a representative-intensity preserving no direction along which the pixel-intensities are invariant)

を抽出したものとなっており、定理3.5を適用すれば、いわゆる"周波数スペクトル"を抽出する役目を持つモデル構成作用素 $T : \Phi \to \Phi$ が得られる：

$$\begin{aligned}
&(\varphi, \psi_{k\ell}) \\
&\fallingdotseq (\Delta\lambda / \pi) \cdot (\Delta\mu / \pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \\
&\varphi(x, y) \cdot \cos[(k-1/2) \cdot \Delta\lambda \cdot x] \\
&\cdot \cos[(\ell-1/2) \cdot \Delta\mu \cdot y]
\end{aligned} \tag{7.20}$$

□

### 7.4 Walsh直交系

内積 $(\varphi, \eta)$ を、

$$\begin{aligned}
&(\varphi, \eta) \\
&= \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1} \cdots \sum_{x_n=0}^{1} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \eta(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= \Sigma_{\underline{x}}\ \varphi(\underline{x}) \cdot \eta(\underline{x})
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\text{ここに、}\underline{x} = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \tag{7.22}$$

とする可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2(M\,;\,dm)$ を用意しよう。ここに、$M, dm(x)$ は、各々

$$M = \{\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \mid x_j \in \{0, 1\},\ j = 1 \sim n\} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned}
&dm(\underline{x}) = dm(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \\
&\begin{cases} 1 & \text{if } \underline{x} \in M, =0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

である。

$-1, +1$ のいずれかの値を取る walsh 関数系 $\{\psi_{\underline{j}}'\}$ の各 $\psi_{\underline{j}}'$ は、

$$\begin{aligned}
&\psi_{\underline{j}}' \equiv \psi_{\underline{j}}'(\underline{x}) \\
&\equiv (1-2x_1)^{j_1} \cdot (1-2x_2)^{j_2} \cdot \cdots \cdot (1-2x_n)^{j_n}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$= (-1)^p$,

ここに、$\underline{j} = \langle j_1, j_2, \cdots, j_n \rangle \in M$ として、

$$p \equiv [\underline{j}, \underline{x}] \equiv \sum_{k=1}^{n} j_k \cdot x_k \tag{7.26}$$

と表される。直交性

$$(\underline{\psi_j}', \underline{\psi_k}')=2^n \text{ if } \underline{j}=\underline{k}, =0 \text{ if } \underline{j}\neq\underline{k} \tag{7.27}$$

が成り立ち、よって、直交展開

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H}, \varphi(\underline{x})$$

$$=\Sigma_{\underline{x}}[(\varphi, \underline{\psi_j}')/(\underline{\psi_j}', \underline{\psi_j}')]\cdot\underline{\psi_j}'(\underline{x}) \tag{7.28}$$

$$=2^{-n}\cdot\Sigma_{\underline{x}}(\varphi, \underline{\psi_j}')\cdot\underline{\psi_j}'(\underline{x}) \tag{7.29}$$

が成り立つことになる。

$$\underline{\psi_j}\equiv\underline{\psi_j}'\cdot\|\underline{\psi_j}'\|^{-1}=2^{-n/2}\cdot\underline{\psi_j}' \tag{7.30}$$

と置き、m>n を満たす正整数 m を選定し、

$$\underline{\eta_j}\equiv(1/m)\cdot\underline{\psi_j} \tag{7.31}$$

と設定すれば、

$$0<\sum_{j=1}^{n}\|\underline{\eta_j}\|=n/m<1 \tag{7.32}$$

が得られる。

## 7.5　区分的3多項式直交系

1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ を具体的に選定し、水平直線成分、右上がり直線成分、凹形2次曲線成分の各定数倍を各画素領域で抽出し、パターンモデル $T\varphi$ を構成する手法を説明しよう。

### 7.5.1　基礎となる3つの直交関数から成る系

区分的多項式直交関数系(piecewise polynomial orthogonal functions)を次のように、用意する：

$$g_0(x)=1 \tag{7.33}$$

$$g_1(x)=x \tag{7.34}$$

$$g_2(x)=x^2-1/3 \tag{7.35}$$

□

直交性

$$\int_{-1}^{+1} dx\ g_j(x)\cdot g_k(x)=0\ (j\neq k) \tag{7.36}$$

と、3積分公式

$$\int_{-1}^{+1} dx\ g_0(x)^2=2 \tag{7.37}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\ g_1(x)^2=2/3 \tag{7.38}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\ g_2(x)^2=8/45 \tag{7.39}$$

が成立ち、3式(7.33)～(7.35)の3関数系 $g_0, g_1, g_2$ は、区間 $\{x \mid -1\leqq x\leqq +1\}$ において直交系を作る。

後にわかるように、$g_0, g_1, g_2$ は各々、水平直線成分、右上がり直線成分、凹形2次曲線成分に相等する成分を抽出するのに使われるパターン形状素である。

### 7.5.2　誘導された3つの直交関数から成る系

2つの区間 $\{x \mid -1\leqq x\leqq +1\}, \{y \mid a\leqq y\leqq b\}$ の間の1対1の変換関数 $x=h(y)$ は、

$$x=h(y; a, b)$$

$$\equiv[2/(b-a)]\cdot[y-2^{-1}\cdot(b+a)] \tag{7.40}$$

であるから、$\overline{\psi}$ を $\psi$ の複素共役として、

$$\int_a^b dy\ \varphi(h(y))\cdot\overline{\psi}(h(y))$$

$$=[(b-a)/2]\cdot\int_{-1}^{+1} dx\ \varphi(x)\cdot\overline{\psi}(x) \tag{7.41}$$

が成り立つことを使えば、

$$\eta_0(y)=g_0(h(y;a,b))=1 \tag{7.42}$$

$$\eta_1(y)=g_1(h(y;a,b))=h(y;a,b) \tag{7.43}$$

$$\eta_2(y)=g_2(h(y;a,b))=h(y;a,b)^2-1/3 \tag{7.44}$$

につき、直交性

$$\int_a^b dy\ \eta_j(y)\cdot\eta_j(y)=0(j\neq k) \tag{7.45}$$

と、3積分公式

$$\int_a^b dy\ \eta_0(y)^2=b-a \tag{7.46}$$

$$\int_a^b dy\ \eta_1(y)^2=3^{-1}\cdot(b-a) \tag{7.47}$$

$$\int_a^b dy\ \eta_2(y)^2=(4/45)\cdot(b-a) \tag{7.48}$$

が成り立つ。

### 7.5.3 区分的多項式直交関数系

直交式(7.45)を満たす3式(7.42)～(7.44)を使って、

添字kの集合L ←→ 添字keの集合$\{ke \mid k=\langle k_1,k_2,\cdots,k_n\rangle, e=\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle,$

$$k_j\in\{p_j,p_j+1,p_j+2,\cdots,r_j\}, e_j\in\{0,1,2\}\} \tag{7.49}$$

$$\psi_k \longleftrightarrow \phi_{ke} \tag{7.50}$$

という対応のもとで、直交系$\{\phi_{ke}\}_{ke}$を作り、式(3.76)の特徴量$u(\varphi,k)$を抽出すると、パターンモデル$T\varphi$を構築できる。

内積$(\varphi,\eta)$として、

$$\begin{aligned}&(\varphi,\eta)\\&=\int_{a(1,p1)}^{a(1,r1)}dx_1\int_{a(2,p2)}^{a(2,r2)}dx_2\cdots\int_{a(n,pn)}^{a(n,rn)}dx_n\ \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&\quad\cdot\eta(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{7.51}$$

を採用したヒルベルト空間$\mathfrak{H}$での直交系

$$\begin{aligned}&\{\phi_{ke}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid k=\langle k_1,k_2,\cdots,k_n\rangle,\\&e=\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle, k_j\in\{p_j,p_j+1,p_j+2,\cdots,r_j\}, e_j\in\{0,1,2\}\}_{ke}\\&\text{ここに、}0\leqq p_j\ \wedge\ r_j\leqq N_j-1\end{aligned} \tag{7.52}$$

を以下の式(7.59)のように構成する：

先ず、1次元区間

$$X(j,k_j)\equiv\begin{cases}\{x_j \mid a(j,k_j)\leqq x_j<a(j,k_j+1)\}\cdots\\ \cdots k_j\in\{p_j,p_j+1,p_j+2,\cdots,r_j-2\}\ \text{のとき}\\ \{x_j \mid a(j,k_j)\leqq x_j<a(j,k_j+1)\}\cdots\\ \cdots k_j=r_j-1\ \ \text{のとき}\end{cases} \tag{7.53}$$

を用意し、広域画素

$$M_k\equiv\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_j\in X(j,k_j), j=1\sim n\} \tag{7.54}$$

を定義しよう。この広域画素$M_k$の特性関数$C_k$とは、

$$C_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv\begin{cases}1\cdots\cdots x\in M_k\ \ \text{のとき}\\ 0\cdots\cdots x\overline{\in}M_k\ \ \text{のとき}\end{cases} \tag{7.55}$$

と定義されるものであるが、このとき、

$$\phi_{j0}(k_j, x_j)$$
$$\equiv g_0(h(x_j; a(j, k_j), a(j, k_j+1))) = 1 \qquad (7.56)$$
$$\phi_{j1}(k_j, x_j)$$
$$\equiv g_1(h(x_j; a(j, k_j), a(j, k_j+1)))$$
$$= h(x_j; a(j, k_j), a(j, k_j+1)) \qquad (7.57)$$
$$\phi_{j2}(k_j, x_j)$$
$$\equiv g_2(h(x_j; a(j, k_j), a(j, k_j+1)))$$
$$= h(x_j; a(j, k_j), a(j, k_j+1))^2 - 1/3 \qquad (7.58)$$

∵ 式(7.42)～(7.44)

を用意し、

$$\phi_{ke}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\equiv C_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \phi_{1e1}(k_1, x_1) \cdot \phi_{2e2}(k_2, x_2) \cdot \cdots \cdot \phi_{nen}(k_n, x_n) \qquad (7.59)$$

□

この式(7.59)の直交系 $\{\phi_{ke}\}_{ke}$ は、

コンピュータビジョンやコンピュータグラフィック ス分野における“形状表現のためのパターン形状素”

と考えられてもよい。

このとき、式(7.59)の $\phi_{ke}, \phi_{\ell d}$ 同士の内積 $(\phi_{ke}, \phi_{\ell d})$ について、1次元区間積分分解表現

$$(\phi_{ke}, \phi_{\ell d})$$
$$= \Pi_{j=1}{}^{n} \int_{X(j,kj)} dx_j\ \phi_{jej}(k_j, x_j) \cdot \phi_{jej}(\ell_j, x_j) \qquad (7.60)$$

が成立しているから、直交性

$$(\phi_{ke}, \phi_{\ell d}) = 0 \text{ if } k \neq \ell \vee e \neq d$$

∵ 式(7.45) (7.61)

と、3積分公式

$$\int_{X(j,kj)} dx_j\ \phi_{j0}(k_j, x_j) \cdot \phi_{j0}(k_j, x_j)$$
$$= a(j, k_j+1) - a(j, k_j)$$

∵ 式(7.46) (7.62)

$$\int_{X(j,kj)} dx_j\ \phi_{j1}(k_j, x_j) \cdot \phi_{j1}(k_j, x_j)$$
$$= 3^{-1} \cdot [a(j, k_j+1) - a(j, k_j)]$$

∵ 式(7.47) (7.63)

$$\int_{X(j,kj)} dx_j\ \phi_{j1}(k_j, x_j) \cdot \phi_{j1}(k_j, x_j)$$
$$= (4/45) \cdot [a(j, k_j+1) - a(j, k_j)]$$

∵ 式(7.48) (7.64)

が成り立つ。

式(3.81)による直交展開は、式(7.59)の基底水平直線成分 $\phi_{k0}$, 右上がり直線成分 $\phi_{k1}$, 凹形2次曲線成分 $\phi_{k2}$

で近似(a piecewise orthogonal approximation)できるものであるから、

$$a(j, k_j+1) - a(j, k_j)$$

ここに、$k_j \in \{p_j, p_j+1, p_j+2, \cdots, r_j-1\}$,

$$j = 1 \sim n \qquad (7.65)$$

を十分小にすれば、パターン $\varphi$ を十分な精度で近似できることになる。

以上、水平直線成分 $\phi_{k0}$，右上がり直線成分 $\phi_{k1}$，凹形2次曲線成分 $\phi_{k2}$ の各定数倍を各画素領域で抽出し、パターンモデル $T\varphi$ を構成する手法が説明された。

なお、この直交展開を補間して、一層精密な特徴抽出を可能にする手法[82]も開発されている。

## 7.6 spline関数系

$$(\varphi, \eta) = \int_0^2 dx \int_0^2 dy\, \varphi(x, y)\eta(x, y) \tag{7.66}$$

と定義される内積 $(\varphi, \eta)$ の下で、パターン $\varphi$ の、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k\in L}$ による1次結合による近似表現

$$\varphi(x, y)$$
$$= \sum_{k\in L} c_k \cdot \psi_k(x, y) + \varphi_\perp \tag{7.67}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} \cdot \psi_i'(x) \cdot \psi_j'(y) + \varphi_\perp \tag{7.68}$$

ここに、

$$L \equiv \{\langle i, j\rangle \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\} \tag{7.69}$$
$$c_k \equiv c_k(i, j) \equiv c_{ij} \tag{7.70}$$
$$\psi_k(x, y) \equiv \psi_{k(i,j)}(x,y)$$
$$\equiv \psi_i'(x) \cdot \psi_j'(y) \tag{7.71}$$

を考えてみよう。

入出力データの集合

$$\{\langle (p, q), b_{p,q}\rangle \mid p, q \in \{0, 1, 2\}\} \tag{7.72}$$

が与えられなければならない。そうすると、1次結合係数 $c_{ij}$ の組は、少なくとも、補間条件

$$\varphi(p, q) = b_{p,q} \text{ for any } p, q \in \{0, 1, 2\} \tag{7.73}$$

を満たすように決定されることになる。

各 $\psi_i'(x)$, $\psi_j'(y)$ $(0 \leqq x, y \leqq 2)$ を、**1次の正規化されたB-スプライン**(normalized B-spline)とすれば、例えば、各 $\psi_1'(x)$ は次のようになる[13]：

① $\psi_1'(x) \equiv$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ 1-x & \text{if } 0 \leqq x<1 \\ 0 & \text{if } 1 \leqq x \end{cases} \tag{7.74}$$

② $\psi_2'(x) \equiv$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ x & \text{if } 0 \leqq x<1 \\ 2-x & \text{if } 1 \leqq x<2 \\ 0 & \text{if } 2 \leqq x \end{cases} \tag{7.75}$$

③ $\psi_3'(x) \equiv$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } x<1 \\ x-1 & \text{if } 1 \leqq x<2 \\ 0 & \text{if } 2 \leqq x \end{cases} \tag{7.76}$$

□

曲線当てはめ(curve-fitting)におけるスプライン近似とは、

各小区間内で各々、高々n次の多項式関数(区分的 多項式関数；piecewise polynomial function)で近似され、然も、それらは互いにできるだけ滑らかにつながっている関数群を求めることによってなされる。つまり、n個のデータ

$$\langle x_i, y_i \rangle, i=1\sim n \tag{7.77}$$

が与えられたとき、補間条件

$$f(x_i)=y_i, i=1\sim n \tag{7.78}$$

を満たす"最も滑らかな"区分的 多項式関数群を求め、その1次結合係数群を決定することによってなされる。

## 7.7 Legendre polynomials[25]

$$(\varphi, \eta) = \int_{-1}^{+1} dx\, \varphi(x) \cdot \eta(x) \tag{7.79}$$

と定義される内積 $(\varphi, \eta)$ の下で、パターン $\varphi$ の、直交系(Legendre Polynomials) [25],[85] $\{\psi_k\}_{k\in L}$ による1次結合による近似表現

$$\varphi(x) = \sum_{k\in L} c_k \cdot \psi_k(x) \tag{7.80}$$

ここに、

$$L \equiv \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \tag{7.81}$$

$$c_k \equiv (\varphi, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k) \tag{7.82}$$

$$\psi_k(x) \equiv P_k(x) \tag{7.83}$$

を考えてみよう。

$P_k(x)$は、

$$P_k(x) \equiv (1/2^n \cdot n!) \cdot (d^n/dx^n)(x^2-1)^n (\text{k次のxの多項式}) \tag{7.84}$$

と定義され、例えば、

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (1/2) \cdot (3x^2-1) \\ P_3(x) &= (1/2) \cdot (5x^3-3x) \\ P_4(x) &= (1/8) \cdot (35x^4-30x^2+3) \\ P_5(x) &= (1/8) \cdot (63x^5-70x^3+15x) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{7.85}$$

である。

直交関係

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_k(x) P_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq \ell \\ 2/(2k+1) & \text{if } k = \ell \end{cases} \tag{7.86}$$

が成り立っており、$(\varphi, P_k)$は、the geometric moment of order n

$$M_n(\varphi) \equiv \int_{-1}^{+1} dx\, x^n\, \varphi(x) \tag{7.87}$$

の1次結合となっている。因みに、

$$\int_{-1}^{+1} dx\, x^m\, P_k(x) = 0 \text{ for } m \in \{0, 1, 2, \cdots, k-1\} \tag{7.88}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, x^k\, P_k(x) = 2^{k+1} \cdot (k!)^2 / (2k+1)! \tag{7.89}$$

が成り立っている。

## 7.8 Zernike moment[4],[26],[85]

$$(\varphi, \eta) = \int dx \int dy_{x^2+y^2\leqq 1}\ \varphi(x, y) \cdot \overline{\eta}(x, y) \tag{7.90}$$

と定義される内積 $(\varphi, \eta)$ の下で、パターン $\varphi$ の、完全直交系 (a complete orthogonal set) $\{\psi_j\}_{j\in L}$ による1次結合による近似表現

$$\varphi(x, y)$$

$$= \sum_{k\in L} [(\varphi, \psi_j) / (\psi_j, \psi_j)] \cdot \psi_j(r, \theta) \tag{7.91}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_{k\ell} \cdot \psi_{k\ell}'(x) \cdot \psi_\ell''(\theta) \tag{7.92}$$

ここに、

$$L \equiv \{\langle k, \ell\rangle \mid k \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \ell \in \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \}\} \tag{7.93}$$

$$\psi_j(r, \theta) \equiv \psi_j(k, \ell)(r, \theta)$$

$$\equiv \psi_{k\ell}'(r) \cdot \psi_\ell''(\theta) \tag{7.94}$$

を考えてみよう。the interior of a unit circle, i.e., $x^2+y^2<1$ を満たす直交座標系 $\langle x, y\rangle$ と同等な polar coordinates $\langle r, \theta\rangle$ が導入されており、

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \tag{7.95}$$

として、

$$\psi_{k\ell}'(r) \tag{7.92}$$

$$\equiv \sum_{s=0}^{(k-|\ell|)/2} [(-1)^s \cdot (k-s)! \cdot r^{k-2s}] / [s! \cdot \{(k+|\ell|)/2-s\}!$$

$$\cdot \{(k-|\ell|)/2-s\}!]$$

(a radial polynomials or Zernike polynomials[4],[26],[85]) (7.96)

$$\psi_\ell''(\theta) \tag{7.94}$$

$$\equiv \exp(+\sqrt{-1}\,\ell\,\theta) \tag{7.97}$$

$k=0, 1, 2, \cdots;\ \ell=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

ここに、$k-|\ell|$ : an even positive integer

と定義される。

直交関係

$$\int dx \int dy_{x^2+y^2\leqq 1}\ \psi_{k\ell}'(r) \cdot \psi_\ell''(\theta) \cdot \psi_{pq}'(r) \cdot \psi_q''(\theta) =$$

$$\begin{cases} \pi/(k+1) & \text{if } k=p \wedge \ell=q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.98}$$

が成り立っており、

$$Z_{k\ell}$$

$$\equiv [(k+1)/\pi] \cdot \int dx \int dy_{x^2+y^2\leqq 1}\ \varphi(x, y)\psi_{k\ell}'(r) \cdot \psi_\ell''(\theta) \tag{7.99}$$

は、

Zernike moment of order k and repetition $\ell$ for an image $\varphi(x, y)$

と呼ばれている。

## 7.9 Hough 変換法

平面上の点 $\langle x, y\rangle \in R^2$ を通り、x軸と角 $\alpha$ $(0 \leqq \alpha < p)$ をなす直線の、原点 $\langle 0, 0\rangle$ を通る同じ角度 $\alpha$ を有する直線への符号つき距離 q は、

$$q = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha \tag{7.100}$$

であることに注目すると、

$$\varphi_{k\ell}(x, y) = [2\pi\sigma_{k\ell}{}^2]^{-1/2} \cdot \exp[-(y \cdot \cos\alpha_k - x \cdot \sin\alpha_k - q_\ell)^2 / (2\sigma_{k\ell}{}^2)] \ (\sigma_{k\ell} > 0) \tag{7.101}$$

ここに、

$$\alpha_k \equiv k \cdot (\pi / m), k \in \{0, 1, \cdots, m-1\} \tag{7.102}$$

$$q_\ell \equiv \ell \cdot \Delta q, \ell \in \{0, 1, \cdots, \pm(n-1)\} \ (\Delta q > 0) \tag{7.103}$$

と定義される関数系 $\{\varphi_{k\ell}\}_{k\ell}$ は、1次独立である。

処理対象とするパターン $\varphi \in \Phi \subset \mathfrak{H}$ について、連立1次方程式(3.15)と同様な方程式の解 $c_{k\ell}(\varphi)$ を計算すれば、点 $\langle x, y\rangle \in R^2$ での、$k, \ell$ を変えて得られる各直線 $q_\ell = y \cdot \cos\alpha_k - x \cdot \sin\alpha_k$ の近傍

$$\{\langle x, y\rangle \in R^2 \mid |y \cdot \cos\alpha_k - x \cdot \sin\alpha_k - q_\ell| \leqq 3\sigma_{k\ell}\} \subset R^2 \tag{7.104}$$

の強度情報(multiangled representative-intensity containing straight line fragments)を、(特に、$\sigma_{k\ell} \to 0$ にすればするほど)近似的に抽出する能力を持ち、2値化パターン $\varphi(x, y) \in \{0, 1\}$ に対してはいわゆる“Hough変換”の役目を持つモデル構成写像 $T : \Phi \to \Phi$ の像 $(T\varphi)(x, y)$ が、定理3.5を適用して得られる。

以下の事実は、上記のHough変換に基づくパターンモデル $T\varphi$ の構成法においては参考となるであろう。内積 $(\varphi, \eta)$ として、

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x) \cdot \overline{\eta}(x) \tag{7.105}$$

を採用し、パターン $\varphi$ をガウス形関数

$$\psi_k(x) \equiv (1/\sqrt{2\pi\sigma_k{}^2}) \cdot \exp(-(x - m_k)^2 / (2\sigma_k{}^2)) \tag{7.106}$$

の1次結合で、

$$\varphi(x) = \sum_{k \in L} c_k(\varphi) \cdot \psi_k(x) \tag{7.107}$$

と近似する場合、第 $k \in L$ 番目の1次結合係数 $c_k(\varphi)$ は例えば、連立1次方程式(3.15)を満たさなければならない。

ところで、積分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp(-\sqrt{-1}\, t x)\, \psi_k(x) = \exp(-\sqrt{-1}\, t\, m_k) \cdot \exp(-2^{-1} \cdot \sigma_k{}^2 \cdot t^2) \tag{7.108}$$

を適用して得られる積分の計算

$$(\psi_k, \psi_\ell) = \{1/\sqrt{2\pi(\sigma_k{}^2 + \sigma_\ell{}^2)}\} \cdot \exp(-2^{-1} \cdot (m_k - m_\ell)^2 / (\sigma_k{}^2 + \sigma_\ell{}^2)) = \tag{7.109}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } m_k \neq m_\ell \ (\sigma_k{}^2 + \sigma_\ell{}^2 \to 0) \\ 1/\sqrt{2\pi(\sigma_k{}^2 + \sigma_\ell{}^2)} & \text{if } m_k = m_\ell \end{cases} \tag{7.110}$$

から、

$\forall k \in L, \sigma_k{}^2 + \sigma_\ell{}^2 \to 0$ であれば、

$$\forall k \in L, c_k(\varphi) \to (\varphi, \psi_k) / (\psi_k, \psi_k) \tag{7.111}$$

が成り立つことに注意しておこう。 □

尚、単位区間 $[0, 1] \equiv \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ でのヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = L_2([0, 1]; dm)$ は、一次変換

$$y = ax + b \quad (a > 0)$$

により、任意有限区間

$$[b, a+b] \equiv \{x \mid b \leqq x \leqq a+b\}$$

でのヒルベルト空間$\mathfrak{H}=L_2([b, a+b];dm)$に拡張できる。その変換公式は

$$0\leqq x\leqq 1 \longleftrightarrow b\leqq y\equiv ax+b\leqq a+b$$

という対応は、1対1であり、微分

$$dy=a\cdot dx$$

を使えば、

$$\int_0^1 dx\ f(x)$$
$$=(1/a)\cdot\int_b^{a+b} dx\, f((y-b)/a) \tag{7.112}$$

である。

また、その他に、興味ある直交系には、

Laguerre functions,Hermite functions[27],

Bessel functions

などがあるが、割愛される。

## 8. むすび

$$\varphi\sim\eta \Leftrightarrow \forall\, k\in L, c_k(\varphi)=c_k(\eta) \tag{8.1}$$

と、2元関係 ～ を定義すれば、～は同値関係である。$\varphi$を含む同値類

$$[\varphi]\equiv\{\eta\in\Phi \mid \varphi\sim\eta\}\subset\Phi\subset\mathfrak{H} \tag{8.2}$$

を導入でき、

$$\eta\in[\varphi]$$

は、式(3.81)の表現式からわかるように、

$$\eta=\sum_{k\in L} c_k(\varphi)\cdot\psi_k+\eta_\perp \tag{8.3}$$

ここに、$\eta_\perp\in\mathfrak{D}$であり、

$$\mathfrak{D}\equiv\{\psi \mid \forall\, k\in L, (\psi,\psi_k)=0\}\text{の閉包} \tag{8.4}$$

と、表現できる。商空間

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{D}\equiv\{[\varphi] \mid \varphi\in\mathfrak{H}\} \tag{8.5}$$

の元$\eta$が式(8.3)の様に表されることは、よく知られていることである。

命題3.2の(i),(iii)は、式(3.85)の各特徴量$u(\varphi, k)$を採用して得られる式(3.76)のパターンモデル$T\varphi$について、

$$\varphi\sim\eta\Rightarrow T\varphi=T\eta \tag{8.6}$$

が成立すること、言い替えれば、

$$T\Psi\equiv\{T\varphi \mid \varphi\in\Psi\} \tag{8.7}$$

と約束すれば、

$$\varphi\sim\eta\Rightarrow T[\varphi]=T[\eta] \tag{8.8}$$

が成立することを、指摘しているのである。式(8.8)の逆は一般的には、成立しないことに注意しておこう。

これまで、パターン情報処理の理論はアドホックな手法で構築されてきた。このような手法とは異なり、S.Suzukiの構築しつつある「パターン認識の数学的理論[84]」は、認識の働きを公理系としてとらえ、公理論的な手法で得られている意味で、他の研究者の理論と区別し得る存在であろう。それだ

からこそ、数理形態学、RBF法, wavelet理論などの成果を取り入れられる形式を備えているのである。

axiom 1(正のスカラー倍についての不変性,構造化の完結性としてのベキ等性)を満たすパターンモデル Tφを使うことにより、各カテゴリのプロトタイプを獲得したあと、発現する認識の働きとしての、構造受精形多段階認識法[70],[84]の1つがこれまでの研究に加えて、確保されたのである。

パターン φに対し、各カテゴリのプロトタイプのモデルとの照合動作の反復を行いながら、モデル構成作用素 T を使用した形式の、多段階認識法[84]は、この φを最終段階で写像 T の不動点に変換することで、写像 T の不動点としてのある1つのプロトタイプのパターンモデルを得、パターン認識の働きを具体化している。

RBF法は、プロトタイプに近い入力パターンガ与えられたとき、補間近似を行う1種のテンプレートとして動作するネットワークを提供している。脳の情報処理要素として、radial basis functions を想定することができ、脳内情報処理の“**認識細胞説**(1つの概念にのみ主として反応する細胞が存在するという説)”を実現するものである。

wavelet展開理論は、「$t \to \pm\infty$ になるに従い、十分早く0に近づく関数としてのwaveletを積分核として用い、時間分解能・周波数分解能双方のほどよい実現」を図るものであり、時間と周波数との間の不確定性関係のあるフーリェ級数論、フーリェ積分論をある意味で一般化し、改良したものである。wavelet毎の時間分解能・周波数分解能を考えることが可能であり(多重分解能)、過渡的信号の検出に適しているのである。

正則化理論(regularization theory)とは、ある適切な拘束条件を見つけ、この拘束条件を付加することによって解の存在可能空間を制限し、不良設定問題を良設定問題に転換し、解を求める理論である[10],[11]。

パターン φからそのモデル Tφへと変換されることにより、冗長性、曖昧性が排除されている観点からは、パターン情報システムが受け取る知識は、見掛け上、無駄と思われる情報を捨て去っているにもかかわらず、増加しているのである[79]。この意味でいえば、モデル構成作用素 T は知識増大作用素といえ、この不動点であるパターンモデル Tφは原パターン φのある種の意味を指示しているのである。

SS理論[84]は、カテゴリが帰属していなかったり、複数のカテゴリが帰属しているパターン φを予め、排除した状況を処理するのではない。このようなパターン φは、

〈パターン, その帰属する可能性のあるカテゴリ番号 のリスト〉

という“認識システムがパターンに対し持つ知識”が多段階認識法によって、

〈零パターン0, 空リスト〉,

に変換されてしまうのである。また、SS理論[84]は、時間的・記憶容量的に実現不能な処理をも、完全に排除しているのではない。a feasible (i.e., polynomial) number of steps のみの処理を取り扱っているのではない。

様々な表現を可能とする枠組(表現系 ; parameterized representation system)としてのパターン情報システムを、SS理論は提供していると言えそうである。SS理論はパターンやパターン情報システムの構造を捨象化した形式で論ずる手段により、情報処理の概念を大きく、拡大しているのである。

残された研究は例えば、次の I, II, III の如く、指摘される。

## I. モデル構成作用素 T の逆問題

パターン $\eta$ が与えられたとき、方程式

$$T\varphi = \eta \tag{8.9}$$

の解 $\varphi$ を求める問題は、不良設定問題である。

正則化パラメータ a , 作用素 P を導入し、$\| T\varphi - \eta \|^2$ , $\| P\varphi \|^2$ を各々、ペナルティ汎関数, 安定化汎関数(stabilizing functional)とみなし、一般化誤差エネルギー

$$E(\varphi) \equiv \| T\varphi - \eta \|^2 + a \cdot \| P\varphi \|^2 \tag{8.10}$$

を最小にする $\varphi$ を求める問題は、不良設定問題を良設定問題に転換させられている、と考えられる。近似解から出発し、これを修正する計算を反復することによって真の解に収束させる手法としての「弛緩法(relaxation method)」の適用などで、恐らく、解くことができようが、モデル構成作用素 T の逆問題(the inverse problem of recovering the original pattern $\varphi$ from image $T\varphi = \eta$)の解決法は将来の研究として、残されている。

## Ⅱ. ユニタリ座標変換 U の族の下で不変なパターンモデル $T\varphi$

文献[42]では、式(3.76)の形式を持つパターンモデル $T\varphi$ があるユニタリ座標変換 U の族の下で不変であるための十分条件が、

① パターン形状素 $\psi_k$ の族 $\{\psi_k\}_{k \in L}$

② 式(3.86)の特徴抽出写像 u

を特定することによって、研究されている。本論文では、ユニタリ座標変換 U の族の下で不変なこのようなパターンモデル $T\varphi$ については、研究しなかった。

パターンモデル $T\varphi$ があるユニタリ座標変換 U の族の下で不変であるためには、

U がある自己共役作用素 H と

$$\exists \varphi \in \mathfrak{H},\ U(H\varphi) \neq H(U\varphi) \tag{8.11}$$

というように、可換であることが必要とされる。

[命題7.1](非可換定理)

固有値方程式

$$H\psi_1 = b_1 \psi_1 \wedge H\psi_k = b_k \psi_k \quad (k \geqq 2) \tag{8.12}$$

が成り立っているとしよう。このとき、

n≧2 について、

$$U\psi_1 = c_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k \psi_k \wedge \tag{8.13}$$

$$[\exists k \in \{2, 3, \cdots, n\},\ b_1 \neq b_k \wedge c_k \neq 0] \tag{8.14}$$

であれば、式(8.11)が成り立つ。

(証明) $U(H\psi_1) = Ub_1 \psi_1 = b_1 U\psi_1$

$$= b_1 (c_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k \psi_k)$$

$$= b_1 c_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} b_1 c_k \psi_k \tag{8.15}$$

であり、また、

$$H(U\psi_1) = H(c_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k \psi_k)$$

$$= c_1 H\psi_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k H\psi_k$$

$$= c_1 b_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k b_1 \psi_k \tag{8.16}$$

であるから、

$$U(H\psi_1) - H(U\psi_1) = \sum_{k=2}^{n} c_k (b_1 - b_k) \psi_k \neq 0 \tag{8.17}$$

を得て、式(8.11)が成り立つ。 □

さて、座標変換Uは何故、ある可分なHilbert spaceでのユニタリ作用素でなければならないかを説明してみよう。

パターン $\varphi$ の表現空間として、パターン間の相関を計量できる内積(正値エルミット形式) $(\varphi, \eta)$ の定義された、単なるノルム空間とは異なるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を選ぶ。

$$\| \varphi - \eta \| = [(\varphi - \eta, \varphi - \eta)]^{1/2} = 0 \tag{8.18}$$

を満たす2つのパターン $\varphi, \eta$ を同一視して、つまり、個々のパターン $\varphi$ に関する具体的意味構成法上の差異を無視するわけである。

我々が1つの特別な座標系xを選んで、パターン $\varphi = \varphi(x)$ を記述するのは、表現の便宜のためであるから、座標系xから今1つ別の座標系x'へ座標変換によって移ったために、パターン $\varphi$ が"本質的に"異なったものになっては困る。

そのためには、ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を規定する基本量である内積 $(\varphi, \eta)$ が座標変換Uの働きに不変であることが要求される。即ち、座標変換Uによって、2つのパターン $\varphi, \eta$ がそれぞれ、$U\varphi, U\eta$ に変じたとき、その間の相関 $(\varphi, \eta)$ の保存性質

$$(U\varphi, U\eta) = (\varphi, \eta) \tag{8.19}$$

が成り立たねばならない。特に、$\varphi = \eta$ とすれば、

そのノルム $\| \varphi \| = [(\varphi, \varphi)]^{1/2}$ が座標変換Uの働きに不変であること、即ち、

座標系の変換"$x \to x'$"に伴うパターン変換

$$\text{“}\varphi(x) \to (U\varphi)(x) = \varphi(x')\text{”} \tag{8.20}$$

における座標変換Uがユニタリ作用素であることを意味するのである。

## Ⅲ. 近似誤差の評価

文献[25]では、モーメント(the geometric moment of order(p, q))[85]

$$M_{pq} = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dy\, x^p y^q \varphi(x, y) \tag{8.21}$$

の離散近似法、並びに、the Legendre polynomials as a complete orthogonal basis set on interval $[-1, +1]$ による直交展開の近似問題を論じている。

本研究では、1次独立な系 $\{\psi_k\}_{k \in L}$ によるパターン $\varphi$ の展開式(3.16)では、展開成分をいたずらに増加させてもその近似がよくなるとは限らない事実を指摘したが(3.1節)、$\{\psi_k\}_{k \in L}$ が直交系である場合はそうでない。その理由は、1次独立な系から得られた正規直交系(4.1.2項)を $\{\psi_k\}_{k \in L}$ と表記すれば、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| \varphi - \sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \|^2 \\ &= (\varphi - \sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k, \varphi - \sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k) \\ &= \| \varphi \|^2 - \sum_{k \in L} |(\varphi, \psi_k)|^2 \quad \text{for any } \varphi \in \text{Hilbert space } \mathfrak{H} \end{aligned} \tag{8.22}$$

が成り立つことから、明らかであるが、パターン $\varphi$ を直交部分和

$$\sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \tag{8.23}$$

で評価するとき、その近似誤差

$$\text{error} = \varphi - \sum_{k \in L} (\varphi, \psi_k) \cdot \psi_k \tag{8.24}$$

の自乗ノルムを各々の場合、具体的に計算することが残っている。

# 文献


[1] 吉田耕作：“ヒルベルト空間論(共立全書49)”, 共立出版, Aug. 1957

[2] Angus E. Taylor, David C. Lay：“Introduction to function analysis”, p. 251, John Wiley & Sons , Inc., New York, 1980

[3] 養老孟司：“情報器官としての脳”, 電子情報通信 学会誌, vol. 78, no. 3, pp. 235-242, Mar. 1995

[4] Jeffrey Wood：“Invariant pattern recognition：A review”, Pattern Recognition, vol. 29, no. 1, pp. 1-17, 1996

[5] Charles A. Micchelli：“Interpolation of scattered data：Distance matrices and conditionlly positive definite functions”, Constructive Approximation, vol. 2, pp. 11-22, 1986 Springer-Verlag New York INc.

[6] 丸山稔：“Radial Basis Functions を用いた学習ネットワーク・ニューロコンピューティングに対する新しいアプローチ”, システム／制御／情報, vol. 36, no. 5, pp. 322-329, 1992

[7] Ioannis Pitas, and Anqastasios N. Venetsanopoulos：“Morphological shape decomposition”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, no. 1, pp. 38-45, Jan. 1990

[8] Tianping Chen and Hong Chen：“Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems”, IEEE Transaction on Neural Networks, vol. 4, no. 6, pp. 910-918, Nov. 1993

[9] Shayan Mukherjee and Shree K. Nayar：“Automatic generation of RBF networks using wavelets”, Pattern Recognition, vol. 29, no. 8, pp. 1369-1383, 1996

[10] 坂上勝彦, 横矢直和：“弛緩法と正則化”, 情報処 理, vol. 30, no. 9, pp. 1047-1057, Sep. 1989

[11] Tomaso Poggio, Vincent Torre and Christof Koch：“Computional vision and regularization theory”, Nature, vol. 317, on. 26, pp. 314-319, 1985

[12] 水谷博之：“一般回帰による正則化理論の多価関数への拡張と線過程を用いない不連続関数再構成アルゴリズム”, 電子情報通信学会論文誌D-Ⅱ, vol. J78-D-Ⅱ, no. 3, pp. 420-428, Mar. 1995

[13] 桜井明, 石井好, 吉村和美, 高山文雄：“スプライン関数入門”,, pp. 106-109, 東京電機大学出版局, May 1991

[14] Carl De Boor：“On calculating with B-splines”, Journal of approximation theory, vol. 6, pp. 50-62, 1972

[15] E. Salari and S. Balaji：“Recognition of partially occluded objects using B-spline representation”, Pattern Recognition, vol. 24, no. 7, pp. 653-660, 1991

[16] Michael Revow, Christopher K. I. Williams, and Geoffrey E. Hinton：“Using generative models for handwritten digit recognition”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 18, no. 6, pp. 592-606, June 1996

[17] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, E. Freysz, G. Grasseau, J. F. Muzy, B. Pouligny：“Wavelet transform of fractals”, Research Notes in Applied Mathematics (Series editors：P. G. Ciarlet and J. -L. Lions)

[18] Ingrid Daubechies：“The wavelet transform, time-frequency localizations and signal analysis”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 36, no. 5, pp. 961-1005, Sept. 1990

[19] 寅市和男, 堀内隆彦：“ウェーブレットと情報処 理”, 情報処理, vol. 35, no. 3, pp. 235-242, Mar. 1994

[20] C. Ducottet, J. Daniere, M. Moine, J. P. Schon and M. Courbon：“Localization of objects with circular symmetry in a noissy image using wavelet transforms and adapted correlation”, Pattern Recognition, vol. 27, no. 3, pp. 351-364, 1994
[21] Stephane Mallat and Wen Liang Hwang：“Singularity detection and processing with wavelets”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 38, no. 2, pp. 617-643, Mar. 1992
[22] Stamatis Cambanis, and Elias Masry：“Wavelet approximation of deterministic and random signals：Convergence properties and rates”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 40, no. 4, pp. 1013-1029, July 1994
[23] Madhu Vairy and Y. V. Venkatesh：“Deblurring Gaussian blur using a wavelet array transform”, Pattern Recognition, vol. 28, no. 7, pp. 965-976, 1995
[24] Peter J. Rousseeuw：“Least median of squares regression”, Journal of the American Statistical Association (Theory and Methods Section), vol. 79, no. 388, pp. 871-880, Dec. 1984
[25] Simon X. Liao and Miroslaw Pawlak：“On image analysis by moments”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 18, no. 3, pp. 254-266, Mar. 1996
[26] Sugata Ghosal and Rajiv Mehrotra：“Orthogonal moment operators for subpixel edge detection”, Pattern Recognition, vol. 26, no. 2, pp. 295-306, 1993
[27] Jan J. Koenderink and Andrea J. Doorn：“Generic neighborhood operators”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 14, no. 6, pp. 597-605, June 1992
[28] Robyn Owens, Svetha Venkatesh, and John Ross：“Edge detection is a projection”, Pattern Recognition Letters, vol. 9, pp. 233-244, 1989 North-Holland
[29] Christian Ronse：“On idempotence and related requirements in edge detection”, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 15, no. 5, pp. 484-491, May 1993
[30] 鈴木昇一：“認識工学(上)”, 柏書房, Feb. 1975
[31] 鈴木昇一：“マルチメディア情報処理のための一般化誤差逆伝播学習ニューラルネットの新数理”, 近代文芸社, Sept. 1996
[32] 鈴木昇一：“測度的不変量検出形認識系の構成理 論”, 電子通信学会論文誌(D), vol. 55-D, no. 8, p. p. 513-538, Aug. 1972
[33] 鈴木昇一：“手書き漢字の側抑制効果的分解とその計算機シミュレーション”, 情報処理学会誌, vol. 15, no. 12, p. p. 927-934, Dec. 1974
[34] 鈴木昇一：“画像情報量とその手書き漢字への応用”, 画像電子学会誌, vol. 4, no. 1, p. p. 4-12, Apr. 1975
[35] 鈴木昇一：“特徴量としての測度的ユニタリ不変量の完全な集合の一構成”, 電子通信学会論文誌(D), vol. J59-D, no. 9, p. p. 678-680, Sept. 1976
[36] 鈴木昇一：“構造化情報パターンの4性質”, 電子通信学会論文誌(D), vol. J59-D, no. 12, p. p. 937-938, Dec. 1976
[37] 鈴木昇一：“パターン認識における構造化モデルの4性質とその応用”, 電子通信学会誌(D), vol. J60-D, no. 9, p. p. 710-717. Sept. 1977
[38] 鈴木昇一：“規格化特徴量の集合の完結構造モデルによる一意的決定”, 電子通信学会論文誌(D), vol. J60-D, no. 10, p. p. 898-899, Oct. 1977
[39] 鈴木昇一：“抽出された特徴による手書き漢字構造の再生”, 情報処理学会誌, vol. 18, no. 11, p. p.

1115-1122, Nov. 1977
[40] 鈴木昇一："構造モデル化写像の一般化", 電子通信学会論文誌(A), vol. J66-A, no. 2, p. p. 162-163, Feb. 1983
[41] 中村三郎, 田代達也, 鈴木昇一："ソフトウエアをコンピュータに作らせる夢ー1つの提案「MIS」についてー", コンピータアクセス, p. p. 54-62, Jan. 1990
[42] 鈴木昇一："パターンのエントロピーモデル", 電子情報通信学会論文誌(D-Ⅱ), vol. J77-D-Ⅱ, no. 10, p. p. 2220-2238, Nov. 1994
[43] 奥野治雄, 鈴木昇一："'黒', '白'成分を分離した文字評価関数による文字認識の研究", 工学院大学研究報告, no. 20, p. p. 91-98, Oct. 1966
[44] 奥野治雄, 鈴木昇一："パターン認識系の識別空間に関する考察", 工学院大学研究報告, no. 24, p. p. 103-110, May 1968
[45] 奥野治雄, 鈴木昇一, 桂井浩, 斉藤静昭："手書き数字認識に関する研究", 工学院大学研究報告, no. 25, p. p. 50-55, Nov. 1968
[46] 鈴木昇一："平均類似度の概念に基づく位相不変的特徴抽出・識別法", 芝浦工業大学研究報告, no. 18, p. p. 95-101, Feb. 1974
[47] 鈴木昇一："認識システムの集まりとその情報処理機能", 芝浦工業大学研究報告, no. 18, p. p. 132-141, Feb. 1974
[48] 鈴木昇一："平均特徴情報量諸定理", 芝浦工業大学研究報告, no. 19, p. p. 327-340, Feb. 1975
[49] 鈴木昇一, 斉藤静昭, 奥野治雄, 太田芳雄："画像の復元とその計算機シュミレーション", 工学院大学研究報告, no. 39, p. p. 198-206. Jan. 1976
[50] 鈴木昇一："phase 情報限定可能定理・詳論", 芝浦工業大学工学部研究報告, no. 20, p. p. 180-196, Feb. 1976
[51] 鈴木昇一, 太田芳雄, 奥野治雄, 斉藤静昭："刺激閾値塊, 類別重み塊に関する自己組織化アルゴリズム", 芝浦工業大学工学部研究報告, no. 20, p. p. 197-208, Feb. 1976
[52] 鈴木昇一, 太田芳雄, 斉藤静昭, 奥野治雄："感覚空間回路の設計と作用素に対するラプラス変換法", 工学院大学研究報告, no. 40, p. p. 122～134, June 1976
[53] 鈴木昇一："認識主体の集合のなすハウスドルフ位相群"、芝浦工業大学工学部研究報告, vol. 21, p. p. 112-136, Feb. 1977
[54] 鈴木昇一："認識の主要な局面と認識諸定理", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 22, no. 1, p. p. 79-99, Mar. 1978
[55] 鈴木昇一, 芝山秀雄, 古田晋吾："移動的ウニタリ座標変換群の下で不変な簡易化構造モデルの標準形", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 22, no. 2, p. p. 29-38, Sept. 1978
[56] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 古田晋吾, 高橋静昭, 奥野治雄："完結構造モデルを用いた位相不変想起認識の理論", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 23, no. 1, p. p. 87-96, Mar. 1979
[57] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 福永一保, 古田晋吾："認識の量子論と画像の微分エントロピー", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 23, no. 1, p. p. 117-125, Mar. 1979
[58] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 古田晋吾, 大槻善樹："標本化音声信号から抽出される測度的不変量", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 23, no. 2, p. p. 67-75, Sept. 1979
[59] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 福永一保, 古田晋吾："発見的探索形位相不変認識システム", 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 23, no. 2, p. p. 76-83, Sept. 1979

[60] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 古田晋吾, 大槻善樹, 高橋静昭, 奥野治雄：“パターン認識における位相不変的簡易化構造モデルの理論”, 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 24, no. 1, p. p. 131-138, Mar. 1980
[61] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 大本修：“コヒ-レント心理状態での認識対象の表現とその応用”, 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 24, no. 1, p. p. 139-146, Mar. 1980
[62] 鈴木昇一, 柴山秀雄, 福永一保, 大本修, 古田晋吾：“作用素に対するフーリエ変換法による側抑制特性の設計”, 芝浦工業大学研究報告理工系編, vol. 24, no. 1, p. p. 147-155, Mar. 1980
[63] 鈴木昇, 大槻善樹：“パターン情報処理における心理物理の数学的取り扱い”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 1, p. p. 18-28, Dec. 1980
[64] 鈴木昇一：“パターン情報処理における構造化パターン, 最良近似構造化パターンと簡約構造モデル”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 2, p. p. 13-31, Dec. 1981
[65] 鈴木昇一：“情報の量子論と平均類似度を保持するあるいは単調的に変換する作用素”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 3, p. p. 11-27, Dec. 1982
[66] 鈴木昇一：“回転群と画像の分解・強調・構造化再構成に関する計算機シュミレーション”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 4, p. p. 36-56, Dec. 1983
[67] 鈴木昇一：“連想形記憶器内荷重関数の最小自乗法”, 自己組織化法による決定”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 5, p. p. 16-28, Dec. 1984
[68] 鈴木昇一：“収縮写像に関する一考察”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 6, p. p. 19-30, Dec. 1985
[69] 鈴木昇一：“連想形記憶器MEMOTRONと日本語母音系列の再生に関する計算機シミュレーション”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 7, p. p. 14-29, Dec. 1986
[70] 鈴木昇一：“認識プログラムFERTのリスト論的形式体系における表現”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 8, p. p. 1-12, Dec. 1987
[71] 鈴木昇一：“収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 9, p. p. 17-29, Dec. 1988
[72] 鈴木昇一, 中村三郎：“知識情報処理における帰納的推論”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 9, p. p. 173-196, Dec. 1988
[73] 鈴木昇一, 中村三郎：“最汎アトムを用いない精密化方法によるPrologプログラムの帰納的自動合成システムの, C言語による実現”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 10, p. p. 151-167, Dec. 1989
[74] 鈴木昇一：“多変量解析に基づく大分類関数の決定とその計算機シミュレーション”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 10, p. p. 35-49, Dec. 1989
[75] 鈴木昇一：“帰属形数法に基づく類似度、帰属関係あいまい度、認識情報量の計算機シミュレーション”、情報研究(文教大学情報学部), vol. 11, p. p. 51-68, Dec. 1990
[76] 鈴木昇一：“Rosenfeld型の確率的弛緩ラベリング法の基本的諸性質”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 11, pp. 163-181, Dec. 1990
[77] 鈴木昇一：“半順序と情報処理”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 12, pp. 121-174, Dec. 1991
[78] 鈴木昇一：“誤差確率分布を考慮した誤差逆伝播学習”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 13, pp. 173-202, Dec. 1992
[79] 鈴木昇一：“新しい情報の測度とパターン情報処理”, 情報研究(文教大学情報学部), vol. 13, pp. 273-358, Dec. 1992
[80] 鈴木昇一：“ミクロ経済学におけるワルラスの法則とパターン類似度関数のホップフィールド

ニューラルネット形調整", 情報研究(文教大学情報学部), vol. 14, pp. 211-236, DEc. 1993
[81] 鈴木昇一, 佐久間拓也："パターンモデルを用いた不動点探索形連想記憶システム方程式", 情報研究(文教大学情報学部), Vol. 15, pp. 97-128, Dec. 1994
[82] 鈴木昇一, 前田英明："パターンの変形理論", 情報研究(文教大学情報学部), Vol. 16, pp. 209-267, Dec. 1995
[83] 鈴木昇一, 佐久間拓也, 前田英明："数理形態学における諸演算とモデル構成作用素", 情報研究(文教大学情報学部), Vol. 17, pp. 133-170, Dec. 1996
[84] 鈴木昇一："パターン認識の数学的理論", 信学技報[パターン認識と学習, パターン認識と理解], PRL84-6(第。部), PRL84-30, PRL84-38, PRL85-27, PRU86-8, PRU86-35, PRU86-69, PRU87-1, PRU87-28, PRU88-30, PRU89-1, PRU89-27, PRU89-40, PRU89-66, PRU89-77, PRU89-136, PRU90-5, PRU90-15, PRU90-29, PRU90-125, PRU91-1, PRU91-29, PRU91-42, PRU92-1, PRU92-18, PRU92-25, PRU92-89, PRU92-102(第28部), May 1984～Jan. 1993
[85] Robert R. Bailey and Mandyam Srinath："Orthogonal moment features for use with parametric and non-parametric classifiers", IEEE Transac-tions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 18, no. 4, pp. 389-399, Apr. 1996
[86] 松本元："脳と情報", 電子情報通信学会誌, vol. 79, no. 8, pp. 837-840, Aug. 1996
[87] 池田克夫, 田村秀行, 全炳東："知能情報メディアーマルチメディアの進化形ー", 電子情報通信学会誌, vol. 79, no. 8, pp. 788-792, Aug. 1996
[88] 石谷明彦："側頭連合野にある図形特徴の連続マップ", 電子情報通信学会誌, vol. 79, no. 8, p. 860, Aug. 1996
[89] 池口徹, 合原一幸："非線形現象の解析手法〔VI・完〕ーカオスと時系列解析ー", 電子情報通信学会誌, vol. 79, no. 8, pp. 814-819, Aug. 1996
[90] 吉川昭："時間-周波数解析の展望〔IV〕ーウェーブレットとその分類ー", 電子情報通信学会誌, vol. 79, no. 8, pp. 820-830, Aug. 1996
[91] C. -H. Lamarque and F. Robert："Image analysis using space-filling curves and 1D wavelet bases", Pattern Recognition, vol. 29, no. 8, pp. 1309-1322, 1996
[92] Richard Buse, Zhi-Qiang Liu and Terry Caelli："Using Gabor filters to measure the physical parameters of lines", Pattern Recognition, vol. 29, no. 4, pp. 615-625, 1996
[93] ゲリファンド, シーロフ："関数解析入門。(共立 全書527)", 功刀金二郎, 井関清志, 笠原章郎訳, §5(2. 部分空間上へのベクトルの射影), 共立出版, June 1964
[94] Tomaso Poggio and Federice Girosi："Networks for approximation and learning", Proceeding of the IEEE, vol. 78, no. 9, Sept. 1990
[95] Eiji Yodogawa："Symmetry, an entropy-like measure of visual symmetry", Perception & Psychophysics, , vol. 32, no. 3, 1982
[96] 坂和正敏, 田中雅博："遺伝的アルゴリズム(ソフトコンピューティングシリーズ1)", 朝倉書店, Sept. 1995
[97] 長島弘幸, 馬場良和："カオス入門(現象の解析と 数理)", 培風館, July 1992
[98] 吉田耕作："超関数論(現代数学講座13)", 共立出版, Sept. 1967
[99] 丸山儀四郎："確率および統計(基礎数学講座10)", 共立出版, Feb. 1963
[100]ゲリファンド, シーロフ："超関数論入門Ⅰ(共立全書526)", 功刀金二郎, 井関清志, 麦林布道, 共

立出版, Aug. 1963

## 3付録A,B,C(第7章の標本化関数系,Walsh直交系,Hough 変換法についての、諸性質の証明)

3付録A,B,Cでは、7.3節の標本化関数系,7.4節のWalsh直交系,7.9節のHough 変換法において証明した方がよいと思われる事項が説明される。

### A. 標本化関数系

**3式(7.17),(7.19),(7.20)を証明**しよう。

先ず、**式(7.19)の証明：**

2積分公式

$$(4\pi W)^{-1}\cdot\int_{-2\pi W}^{+2\pi W} d\lambda\ \exp(+i\lambda x)$$
$$=(2\pi Wx)^{-1}\cdot\sin(2\pi Wx) \tag{A.1}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp(-i\lambda x)\cdot(2\pi W/\pi)\cdot(2\pi Wx)^{-1}\cdot\sin(2\pi Wx)=$$
$$\begin{cases} 1 \text{ if } |\lambda| \leqq 2\pi W \\ 0 \text{ if } |\lambda| > 2\pi W \end{cases} \tag{A.2}$$

ここに、$i\equiv\sqrt{-1}$, $W>0$

を適用する。

式(7.15)の $\psi_{k\ell}$ を計算すれば、

$$\psi_{k\ell}(x,y)$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot\left[\int_{-k\cdot\Delta\lambda}^{+k\cdot\Delta\lambda} d\lambda-\int_{-(k-1)\cdot\Delta\lambda}^{+(k-1)\cdot\Delta\lambda} d\lambda\right]\cdot\exp(+i\lambda x)$$
$$\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\left[\int_{-\ell\cdot\Delta\mu}^{+\ell\cdot\Delta\mu} d\mu-\int_{-(\ell-1)\cdot\Delta\mu}^{+(\ell-1)\cdot\Delta\mu} d\mu\right]\cdot\exp(+i\mu x)$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot[2\cdot k\cdot\Delta\lambda\cdot(k\cdot\Delta\lambda\cdot x)^{-1}\cdot\sin(k\cdot\Delta\lambda\cdot x)-2$$
$$\cdot((k-1)\cdot\Delta\lambda)\cdot((k-1)\cdot\Delta\lambda\cdot x)^{-1}\cdot\sin((k-1)\cdot\Delta\lambda\cdot x)]$$
$$\cdot(2\pi)^{-1}\cdot[2\cdot\ell\cdot\Delta\mu\cdot(\ell\cdot\Delta\mu\cdot x)^{-1}\cdot\sin(\ell\cdot\Delta\mu\cdot x)-2$$
$$\cdot((\ell-1)\cdot\Delta\mu)\cdot((\ell-1)\cdot\Delta\mu\cdot x)^{-1}\cdot\sin((\ell-1)\cdot\Delta\mu\cdot x)]$$
$$\because\ \text{式(A.1)} \tag{A.3}$$

が得られるが、式(7.18)を使って、これを整理すれば、式(7.19)が得られる。 □

その次に、**式(7.17)の証明：**

2つの複素数値関数 $\psi_\lambda,\eta_\mu$ を、

$$\psi_\lambda\equiv\psi_\lambda(x)\equiv(2\pi)^{-1/2}\cdot\exp(+i\lambda x) \tag{A.4}$$
$$\eta_\mu\equiv\eta_\mu(y)\equiv(2\pi)^{-1/2}\cdot\exp(+i\mu y) \tag{A.5}$$

と導入する。

式(7.14)の内積$(\varphi,\eta)$で考えていることに注意する。フーリェ積分定理

$$\forall\ \varphi\in\mathfrak{H},$$
$$\varphi=\varphi(x,y)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\ \psi_\lambda(x)\eta_\mu(y)\cdot(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu) \tag{A.6}$$

が成り立つ。この式(A.6)から、

$\forall \varphi, \forall \eta \in \mathfrak{H}$,

$$(\varphi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu (\varphi, \psi_\lambda \eta_\mu) \cdot \overline{(\eta, \psi_\lambda \eta_\mu)} \tag{A.7}$$

が成り立つ。

さて、2つの実関数$f(\lambda), g(\mu)$を、

$$f_k(\lambda) \equiv \begin{cases} 1 \text{ if } (k-1) \cdot \Delta\lambda \leqq |\lambda| < k \cdot \Delta\lambda \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{A.8}$$

$$g_\ell(\mu) \equiv \begin{cases} 1 \text{ if } (\ell-1) \cdot \Delta\lambda \leqq |\mu| < \ell \cdot \Delta\lambda \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{A.9}$$

とおく。

式(7.15)の$\psi_{k\ell}$は、

$$\psi_{k\ell}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \psi_\lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, \eta_\mu(y) \quad (2\pi)_{-1} \cdot f_k(\lambda) \cdot g_\ell(\mu) \tag{A.10}$$

と再表現されるから、式(A.6)の意味するところより、

$$(\psi_{k\ell}, \psi_\lambda \eta_\mu) = (2\pi)^{-1} \cdot f_k(\lambda) \cdot g_\ell(\mu) \tag{A.11}$$

を得、式(A.11)を式(A.7)に代入すると、

$$(\psi_{k\ell}, \psi_{mn}) = (2\pi)^{-1} \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \quad f_k(\lambda) \cdot g_\ell(\mu) \cdot f_m(\lambda) \cdot g_n(\mu) \tag{A.12}$$

が成立する。

(i) $k \neq m \vee \ell \neq n$ のとき

$$f_k(\lambda) \cdot f_m(\lambda) = 0 \vee g_\ell(\mu) \cdot g_n(\mu) = 0 \tag{A.13}$$

から、

$$(\psi_{k\ell}, \psi_{mn}) = 0 \tag{A.14}$$

が成り立つことがわかる。

(ii) $k = m \wedge \ell = n$ のとき

$$\begin{aligned}
(\psi_{k\ell}, \psi_{k\ell}) &= (2\pi)^{-1} \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, f_k(\lambda) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, g_\ell(\mu) \\
&\qquad \because\ f_k(\lambda)2 = f_k(\lambda) \quad \wedge \quad g_\ell(\mu)^2 = g_\ell(\mu) \\
&= (2\pi)^{-1} \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \int_{(k-1)\cdot\Delta\lambda \leqq |\lambda| < k\cdot\Delta\lambda} d\lambda \int_{(\ell-1)\cdot\Delta\mu \leqq |\mu| < \ell\cdot\Delta\mu} d\mu \\
&= (2\pi)^{-1} \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \left[\int_{-k\cdot\Delta\lambda}^{+k\cdot\Delta\lambda} d\lambda - \int_{-(k-1)\cdot\Delta\lambda}^{+(k-1)\cdot\Delta\lambda} d\lambda\right] \cdot \left[\int_{-\ell\cdot\Delta\mu}^{+\ell\cdot\Delta\mu} d\mu - \int_{-(\ell-1)\cdot\Delta\mu}^{+(\ell-1)\cdot\Delta\mu} d\mu\right] \\
&= (2\pi)^{-1} \cdot (2\pi)^{-1} \cdot [2k \cdot \Delta\lambda - 2(k-1) \cdot \Delta\lambda] \cdot [2\ell \cdot \Delta\lambda - 2(\ell-1) \cdot \Delta\lambda]
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot(2\pi)^{-1}\cdot 2\cdot\Delta\lambda\cdot 2\cdot\Delta\lambda$$
$$=(\Delta\lambda/\pi)\cdot(\Delta\mu/\pi)$$
を得て、証明された。 □

最後に、**式(7.20)の証明：**先ず、

$$(\varphi,\psi_{k\ell})$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu\ (\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\cdot\overline{(\psi_{k\ell},\psi_\lambda\eta_\mu)}$$
$$\because\ \text{式(A.7)}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu\ (\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\cdot\overline{(2\pi)^{-1}\cdot f_k(\lambda)\cdot g_\ell(\mu)}$$
$$\because\ \text{式(A.11)}$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{(k-1)\cdot\Delta\lambda\leqq|\lambda|<k\cdot\Delta\lambda}d\lambda$$
$$\int_{(\ell-1)\cdot\Delta\mu\leqq|\mu|<\ell\cdot\Delta\mu}d\mu\,(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot\left[\int_{(k-1)\cdot\Delta\lambda}^{k\cdot\Delta\lambda}d\lambda+\int_{-k\cdot\Delta\lambda}^{-(k-1)\cdot\Delta\lambda}d\lambda\right]$$
$$\cdot\left[\int_{-(\ell-1)\cdot\Delta\mu}^{\ell\cdot\Delta\mu}d\mu-\int_{-\ell\cdot\Delta\mu}^{-(\ell-1)\cdot\Delta\mu}d\mu\right] \tag{A.15}$$

に注意する。

$(\Delta\lambda),(\Delta\mu)>0$ を十分小さく選んでいるから、

① $(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\fallingdotseq(\varphi,\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_\mu)$ if $(k-1)\cdot\Delta\lambda\leqq\lambda<k\cdot\Delta\lambda$

② $(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\fallingdotseq(\varphi,\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_\mu)$ if $-k\cdot\Delta\lambda<\lambda\leqq(k-1)\cdot\Delta\lambda$

③ $(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\fallingdotseq(\varphi,\psi_\lambda\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu})$ if $(\ell-1)\cdot\Delta\mu\leqq\mu<\ell\cdot\Delta\mu$

④ $(\varphi,\psi_\lambda\eta_\mu)\fallingdotseq(\varphi,\psi_\lambda\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu})$ if $-\ell\cdot\Delta\mu<\mu\leqq-(\ell-1)\cdot\Delta\mu$

と、近似できる。ここで、

⑤ $\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}(x)+\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}(x)$
$=(2\pi)^{-1/2}\cdot[\exp(+i\,(k-1/2)\cdot\Delta\lambda\cdot x)+\exp(-i\,(k-1/2)\cdot\Delta\lambda\cdot x)]$
$=(2\pi)^{-1/2}\cdot 2\cdot\cos((k-1/2)\cdot\Delta\lambda\cdot x)$

⑥ $\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu}(y)+\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu}(y)$
$=(2\pi)^{-1/2}\cdot[\exp(+i\,(\ell-1/2)\cdot\Delta\mu\cdot y)+\exp(-i\,(\ell-1/2)\cdot\Delta\mu\cdot y)]$
$=(2\pi)^{-1/2}\cdot 2\cdot\cos((\ell-1/2)\cdot\Delta\mu\cdot y)$

であることに、留意すると、

$$(\varphi,\psi_{k\ell})$$
$$\fallingdotseq(2\pi)^{-1}\cdot(\Delta\lambda)\cdot(\Delta\mu)$$
$$\cdot[(\varphi,\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu})$$
$$+(\varphi,\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu})$$
$$+(\varphi,\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu})$$
$$+(\varphi,\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu})]$$
$$\because\ ①\sim④\text{と式(A.15)}$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot(\Delta\lambda)\cdot(\Delta\mu)\cdot$$
$$[(\varphi,\{\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}+\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}\}\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu})$$
$$+(\varphi,\{\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}+\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}\}\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu})]$$
$$=(2\pi)^{-1}\cdot(\Delta\lambda)\cdot(\Delta\mu)\cdot$$
$$(\varphi,\{\psi_{k\cdot\Delta\lambda-(1/2)\cdot\Delta\lambda}+\psi_{-k\cdot\Delta\lambda+(1/2)\cdot\Delta\lambda}\}$$

$\{\eta_{-\ell\cdot\Delta\mu+(1/2)\cdot\Delta\mu}+\eta_{\ell\cdot\Delta\mu-(1/2)\cdot\Delta\mu}\})$
$=(2\pi)^{-1}\cdot(\Delta\lambda)\cdot(\Delta\mu)\cdot$
$(\varphi,(2\pi)^{-1/2}\cdot 2\cdot\cos((k-1/2)\cdot\Delta\lambda\cdot x)\cdot$
$(2\pi)^{-1/2}\cdot 2\cdot\cos((\ell-1/2)\cdot\Delta\mu\cdot y))$

$\because$ ⑤，⑥

を整理すれば、所要の式(7.20)が得られる。 □

## B. Walsh直交系

**式(7.27)を証明**し、式(7.25)の $\psi_j'$ から成る**Walsh関数系** $\{\psi_{\underline{j}}'\}$ **の完全性を証明**しよう。

先ず、**式(7.27)の証明：**

（i） $\underline{j}=\underline{k}$ の場合

$$(1-2x_\ell)^{j_\ell}=1 \text{ if } x_\ell=0,=-1 \text{ if } x_\ell=1 \tag{B.1}$$

であるから、

$$\begin{aligned}&\psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\cdot\psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\\&=\{(1-2x_1)^2\}^{j_1}\cdot\{(1-2x_2)^2\}^{j_2}\cdot\cdots\cdot\{(1-2x_n)^2\}^{j_n}\\&=1\cdot1\cdot\cdots\cdot1=1 \text{ for any } x\end{aligned}\tag{B.2}$$

が成り立ち、内積$(\varphi,\eta)$の定義式(7.21)から、

$$\begin{aligned}&(\psi_{\underline{j}}',\psi_{\underline{j}}')\\&=\Sigma_{\underline{x}}\ \psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\cdot\psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\\&=\Sigma_{\underline{x}}\ 1=2^n.\end{aligned}$$

（ii） $\underline{j}\neq k$ の場合

$$\begin{aligned}&(\psi_{\underline{j}}',\psi_{\underline{j}}')\\&=\Sigma_{\underline{x}}\ \psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\cdot\psi_{\underline{j}}'(\underline{x})\\&=\Sigma_{\underline{x}}\ (1-2x_1)^{j_1+k_1}\cdot(1-2x_2)^{j_2+k_2}\cdot\cdots\cdot(1-2x_n)^{j_n+k_n}\end{aligned}\tag{B.3}$$

が成立している。ところで、

$$\underline{j}\neq k\Rightarrow\exists i, j_i\neq k_i \quad \therefore\ j_i+k_i=1 \tag{B.4}$$

であるから、

$$\begin{aligned}&\sum_{x_i=0}^{1}(1-2x_i)^{j_i+k_i}=\sum_{x_i=0}^{1}(1-2x_i)\\&=1+(-1)=0\end{aligned}\tag{B.5}$$

が成立していることを、式(B.3)に考慮すれば、

$$\begin{aligned}&(\psi_{\underline{j}}',\psi_{\underline{k}}')\\&=[\sum_{x_1=0}^{1}(1-2x_i)^{j_1+k_1}]\cdot[\sum_{x_2=0}^{1}(1-2x_i)^{j_2+k_2}]\cdot\cdots\cdot\\&[\sum_{x_i=0}^{1}(1-2x_i)^{j_i+k_i}]\cdot\cdots\cdot[\sum_{x_n=0}^{1}(1-2x_n)^{j_n+k_n}]\\&=0\end{aligned}$$

を得、証明が終わった。 □

次に、**Walsh 関数系** $\{\psi_{\underline{j}}'\}$ **の完全性の証明：Walsh 関数系** $\{\psi_{\underline{j}}'\}$ **の完全性**(completeness)

$$\forall j,(\varphi,\psi_{\underline{j}}')=0\Rightarrow\|\varphi\|=0 \tag{B.7}$$

を証明しよう。

$\mathbf{F}_n\equiv\mathbf{F}_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;j_n)$

$$\equiv \sum_{x_n=0}^{1}(1-2x_n)^{j_n+k_n}\cdot\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{B.8}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
&\forall j, 0=(\varphi,\psi_{\underline{j}}{}')\\
&=\sum_{x_1=0}^{1}(1-2x_i)^{j_1}\cdot\sum_{x_2=0}^{1}(1-2x_i)^{j_2}\cdot\cdots\cdot\\
&\sum_{x_{n-1}=0}^{1}(1-2x_n-1)^{j_{n-1}}\cdot\sum_{x_n=0}^{1}(1-2x_n)^{j_n}\cdot\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&=\sum_{x_1=0}^{1}(1-2x_i)^{j_1}\cdot\sum_{x_2=0}^{1}(1-2x_i)^{j_2}\cdot\cdots\cdot\\
&\sum_{x_{n-1}=0}^{1}(1-2x_n-1)^{j_{n-1}}\cdot F_n
\end{aligned} \tag{B.9}$$

が成立している。ここで、式(B.8)の $F_n$ について、

$$\begin{aligned}
&\forall j_n\in\{0,1\},\\
&0=F_n\\
&=(1-2x_n)^{j_n}\cdot\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid_{x_n=0}\\
&\quad+(1-2x_n)^{j_n}\cdot\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid_{x_n=1}\\
&=\varphi(x_1,x_2,\cdots,0)+(-1)^{j_n}\cdot\varphi(x_1,x_2,\cdots,1)=\\
&\begin{cases}\varphi(x_1,x_2,\cdots,0)+\varphi(x_1,x_2,\cdots,1)\\ \qquad\cdots j_n=0\ \text{のとき}\\ \varphi(x_1,x_2,\cdots,0)-\varphi(x_1,x_2,\cdots,1)\\ \qquad\cdots j_n=1\ \text{のとき}\end{cases}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

であるから、

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,0)=0 \qquad \because\ j_n=0,1\text{の}F_n\text{の和} \tag{B.11}$$

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,1)=0 \qquad \because\ j_n=0,1\text{の}F_n\text{の差} \tag{B.12}$$

が成立する。$j_{n-1},j_{n-2},\cdots,j_1$ に対し同様にすれば、

$$\begin{aligned}&\forall x_1,\forall x_2,\cdots,\forall x_n\in\{0,1\},\\ &\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{aligned} \tag{B.13}$$

を得、

$$\|\varphi\|^2=\Sigma_{\underline{x}}\varphi(\underline{x})^2=0 \tag{B.14}$$

が成立し、証明が終わった。 □

## C. Hough 変換法

**式(7.108)と式(7.109)とを証明**しよう。

先ず、式(7.108)の成立を示そう。

フーリエ変換公式

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ \exp(itx)\cdot(2\pi)^{-1/2}\cdot\exp(-x^2/2)\\ &=\exp(-t^2/2)\\ &\text{ここに、}i\equiv\sqrt{-1}\end{aligned} \tag{C.1}$$

を適用すれば、積分公式

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ \exp(itx)\cdot(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\cdot\exp(-(x-m)^2/(2\sigma^2))\\ &=\exp(itm)\cdot\exp(-\sigma^2\cdot t^2/2)\end{aligned}$$

ここに、

$$-\infty < m < +\infty \wedge 0 < \sigma^2 \tag{C.2}$$

が成り立つことがわかる。この式(C.2)から式(7.108)の成立は明らかである。

**次に、式(7.109)の成立を証明**しよう。

フーリエ変換の意味するところにより、積分公式

$\forall \varphi, \forall \eta \in L_2(R\,;dx)$,

$$(\varphi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [(2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-itx) \cdot \varphi(x)] \cdot \overline{[(2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-itx) \cdot \eta(x)]} \tag{C.3}$$

が成り立つから、式(7.106)の $\psi_k$ について、

$$(\psi_k,\psi_\ell) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-it(m_k - m_\ell)) \cdot \exp[-\{(\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2)/2\} \cdot t^2] \tag{C.4}$$

が得られる。ここで、変数変換

$$y = \sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2} \cdot t \tag{C.5}$$

を考えると、式(C.4)の $(\psi_k,\psi_\ell)$ は、

$$\begin{aligned}(\psi_k,\psi_\ell) &= (1/\sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2}) \cdot (2\pi)^{-1/2} \cdot (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp[iy\{-(m_k - m_\ell) / \sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2}\}] \cdot \exp(-y^2/2) \\ &= (1/\sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2}) \cdot (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp[-(1/2)\{-(m_k - m_\ell)/\sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2}\}^2] \\ &\qquad \because\ \text{式(C.1)} \\ &= \{1/\sqrt{\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2})\} \cdot \exp[-(1/2) \cdot (m_k - m_\ell)^2/(\sigma_k{}^2+\sigma_\ell{}^2)]\end{aligned} \tag{C.6}$$

と変形され、証明が終わった。 □

(鈴木昇一, 文教大学・情報学部・情報システム学科、“文教大学・情報学部・情報研究 no.17”投稿論文、論文題目 Radial-basis function networks,wavelet-based networks を用いたモデル構成作用素の構成法、投稿年月日 1996年10月11日(金))