

平面上の3角格子と離散構造問題

加納幹雄, 柳 英樹, 阿部貴之, 沖津宏泰, 染谷顕正,
濱田理恵*, 松浦亮*, 関山健一*, 原田大輔*,
佐々木哲也*, 藤田宏明*, 星 誠司*,

茨城大学工学部情報工学科

〒316-8511 日立市中成沢町4-12-1

e-mail: kano@cis.ibaraki.ac.jp <http://gorogoro.cis.ibaraki.ac.jp>

Triangle Lattice in the Plane and Discrete Structure Problems.

M. Kano, H. Yanagi, T. Abe, H. Okitsu, K. Someya, R. Hamada,
R. Matsu-ura, K. Sekiyama, D. Harada, T. Sasaki, H. Fujita, and S. Hoshi

概 要

We consider a triangle lattice in the plane instead of an usual quadrangle lattice, and study some discrete structure problems on the triangle lattice. Namely, we consider life-games, graph drawings, Voronoi diagrams, channel routing problems, and other distributing problems on the triangle lattice in the plane, which are usually considered on the quadrangle lattice. The usual quadrangle lattice is not a maximal planar graph, but the triangle lattice is a maximal planar graph. Moreover edges of the usual lattice are parallel to x-axis or y-axis, and have only four directions. On the other hand, edges of the triangle lattice have six directions, and so its edges are distributed more uniformly than the usual lattice. From these point of view, we define some problems on the triangle lattice, and show that the triangle lattice has some advantage of these problems by some solutions obtained by computer.

平面上の3角格子において, ライフゲーム, 平面グラフの描画, ボロノイ図, 配線問題など考える. これらは従来普通の格子, すなわち4角格子において考えられ, また研究されてきた問題である. しかし, 平面グラフとしてみたとき, 3角格子は4角格子よりも密で均一性が高い. これからより良い解とか, 4角格子とは異なる特色のある振る舞いが期待されるが, 実際上の問題においてそのような結果を得た. これらの結果をまとめて報告する.

*元茨城大学工学部情報工学科

1 はじめに

平面上の4角（正方形）格子を利用して考えられ、また研究されてきた問題は多数ある。ここで4角格子とは、図1に示されている普通の格子である。これは平面上に x - y 座標を導入し、 x -軸、 y -軸に平行な幅1で等間隔に並んだ直線群から構成されている。そのため座標の利用も容易であり、また人の自然な感覚とよく合うという観点からも考えやすく、幅広い多種多様な問題が4角格子で考えられ、また研究されてきた。

しかし、4角格子を平面上の平面グラフとして捉えると、これは極大平面グラフではなく、辺が疎であり、より多くの辺があれば解決しやすい問題に対しては不満が残る。また、点とか辺の方向に偏りがあり、方向性のない問題に対しても他の方向が利用されておらず、問題解決の妨げになることもある。この観点に立つと、図1に示した3角形（正3角形）格子は、平面グラフとみたとき極大平面グラフとなっており、交差させることなく新たに辺を追加することはできず、辺に関して最密になっている。また、点とか辺も6方向に均一に広がっており、方向性のない問題に対しては4角格子よりは有利であることが予想される。

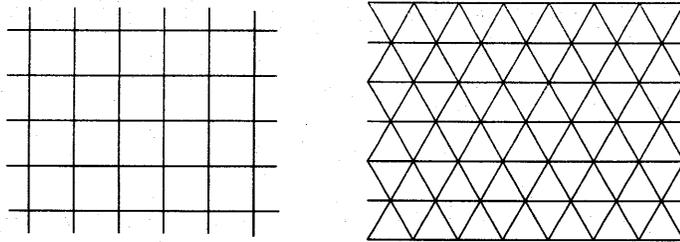


図1：4角格子（左）と3角格子（右）

ここでは実際にいくつかの問題に対して3角格子上で問題を解き、ここで述べた期待が予想通り成り立つことを確かめた。同時に3角格子には、4角格子とは違う独自の興味ある特徴があることも確認できた。これらの要点をまとめて報告する。

ここでは4角格子、3角格子を問わず、直線の交点を**格子点**とよび、4角形とか3角形の面（マス目）を**セル**とよぶ。

2 茨大型ライフゲームと紋様の生成

ライフゲームは Conway によって1970年に発見され、コンピュータで楽しめる代表的な自動ゲームとして広く親しまれてきた [1]。

このゲームは4角格子のいくつかのセルに石を置き、これのあるルールに従って石を取り除いたり、新たに石を加えたりして石の状態を変化させ、その変化の様子を楽しむゲームである。そして、その石の状態の変化が生物集団の盛衰を連想させることからライフゲームと名付けられている。また、変化の様子が非常に複雑であることも特筆すべきである。

ゲームのルールは次の通りである。なお、各セルの周りには辺および点で接する8個の隣接セルがある。

- (1) セルに石があり、そのセルに隣接する8個のセルに2個または3個の石があるなら、セルの石は次の状態でもそのままある（生き残る）。それ以外の個数ならセルの石はなくなる（死滅する=取り除く）（図2）。
- (2) セルに石がなく、そのセルに隣接する8個のセルに3個の石があるなら、次の状態でセルに石をおく（誕生する）。それ以外の個数なら無いままである（図2）。

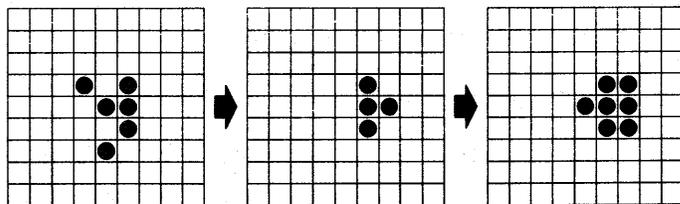


図2：ライフゲームの3つの連続する状態変化の例

ここで上のルールが唯一のものであることを注意しておく。つまり、上で述べたルールを少しでも変更すると、「石の集団がすぐに安定状態とか周期状態になる」、「石の個数が無限に増えてしまう」、「石がすべて消滅してしまふ」のいずれかが起こる。たとえば、ルール（2）における誕生条件の石の個数を2個にするとか、4個にするとか、2または3個などに変更するとこのようなことになる。ルール（1）についても同様である。私の研究室で調べた限りでは、これ以外のルールではライフゲームに近い複雑で面白い動きをするものは見つからなかった。その意味で唯一のルールと思われる。

一方、石の個数が無限に増えるルールに対しては、たとえば石の誕生順に巡回的に石を着色するなどすると、刻々と紋様を変えながら石の集団が無限に大きくなり、かつその紋様が非常にきれいなものが多数見つかっている。また、これから述べる重み付きのルールにすると元のライフゲームと同等かまたはそれ以上に複雑な面白い動きをするものも見つかっている[2], [3], [4], [5]。これについては今後も新しいルールが多数見つかるものと思われる。

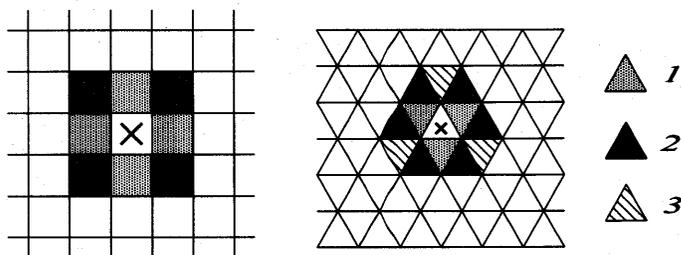


図3：4角格子(左)と3角格子(右)における隣接セルの分類

3角格子におけるライフゲームを述べる前に、格子における重み付きライフゲームについて述べる。各セルに対して、そのセルに辺で隣接する4個のセルにある石の個数を x 個、点で接する角の4個のセルにある石の個数を y 個とし、セルの重みを $w=2x+y$ と決める(図3)。一般には $w=ax+by$ と定義することができるが、ここではよく調べられているこの重みに限定して述べる。整数の集合 I と J に対して、ルールを一般に次のよう決める。

- (1) セルに石があるとき、もし $w \in I$ ならセルの石は次の状態でもそのままある(生き残る)。それ以外($w \notin I$)ならセルの石はなくなる(死滅する=取り除く)。
- (2) セルに石がないとき、もし $w \in J$ なら次の状態でセルに石をおく(誕生する)。それ以外なら無いままである。

このとき、興味ある I, J の例としては次のようなものがある[3]。

$$I=\{2, 3\}, J=\{4, 5\}; \quad I=\{3, 4, 5, 6\}, J=\{4\}; \quad I=\{4, 5, 6\}, J=\{4, 5\}$$

また紋様に対しては、 i 世代に生まれた石を順にたとえば白、赤、黄、青と着色し、ルールを例えば

$$I=\{2, 3\}, J=\{3, 4\}; \quad I=\{2, 3, 4, 5\}, J=\{3, 4\}; \quad I=\{0, 1, 2, 3, 4\}, J=\{1, 2, 3\}$$

など決めると興味ある紋様が多量に生成される[4]。

さて、3角格子におけるライフゲームのルールを述べよう。基本は4角格子の場合と同じである。つまり、いくつかの3角セルに石をおき、これらの石が条件にしたがって生き残ったり、死んだり、また新たに石が誕生する。3角格子の各セルに対して、これに接しているセルは12個あり、それらのセルは接し方により3通りに分けられる。そして、辺で接する3個のセルにある石の個数を x 個、これら3個のセルに辺で接する6個のセルにある石の個数を y 個とおき、これ以外の3個のセルにある石の個数を z 個とおく(図3)。そして重みを

$$w=ax+by+cz$$

と定義する。ルールは4角格子の場合と同様である。

- (1) セルに石があるとき、もし $w \in I$ ならセルの石は次の状態でもそのままある(生き残る)。それ以外ならセルの石はなくなる(死滅する=取り除く)。
- (2) セルに石がないとき、もし $w \in J$ なら次の状態でセルに石をおく(誕生する)。それ以外なら無いままである。

興味ある I, J の例としては次のようなものがある[3]。

$$a=b=c=1, \quad I=\{2,3\}, J=\{3\}; \quad I=\{3,4,5\}, J=\{4\}$$

$$a=3, b=2, c=1, \quad I=\{4,5,6,7\}, J=\{4\}; \quad I=\{4,5,6,7,8\}, J=\{7,8\}$$

また紋様に対しては、 i 世代に生まれた石を順にたとえば白、赤、黄、青と着色し、

$$a=2, b=c=1, \quad I=\{3,4,5\}, J=\{1,2\}; \quad I=\{3,4,5\}, J=\{4\}$$

などとルールを決めると面白い紋様が生成される[5]。これら重み付きライフゲームとか3角格子、ここでは述べなかったが6角格子などにおけるライフゲームを茨大型ライフゲームとよぶ[2]。

この他、一般的に言って、100個程度の石をある密度で配置してライフゲームを始めると、ほぼ 100×100 程度の範囲を動き回ることが多く、これより大きい範囲を動き回ることが少ない。一方

3角格子におけるあるライフゲームでは100個程度の石をある密度で配置すると500×500程度の広い範囲を動き回ることがよく起こる。これは3角格子ライフゲームの特徴のひとつと言ってよからう。

3 グラフの描画

グラフの描画とは、与えられたグラフを平面上に見やすい形とか、利用しやすい形に描画することである。描画方法としては様々な方法があるが、代表的なもののひとつは、グラフを4角格子上に描画するものである。

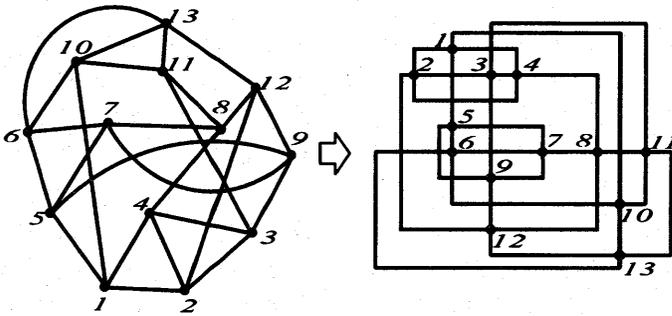


図4：4角格子上におけるグラフの描画

これは、与えられたグラフの点を4角格子の格子点に配置し、辺は格子の線の上に描く方法である。このとき描画ルールとして、格子点における辺の交差は許されるが、

交差する格子点では2本の辺は直進するものとする

というルールを付ける。このルールにより、たとえ辺の交差があっても辺がどの2点を結んでいるかは見やすいし、またこの描画を後で述べるような2層配線として実現すれば、実際には交差のない、つまり配線がショートしないような配線が得られる (図13)。

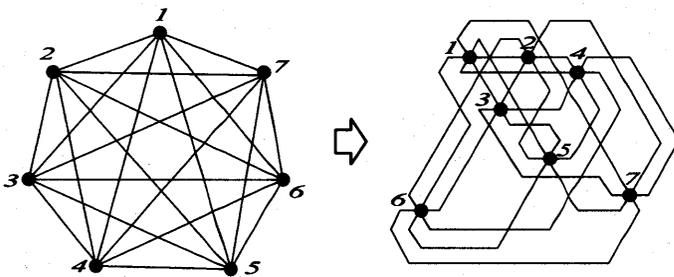


図5：3角格子上におけるグラフの描画

この描画法においては、グラフの最大次数が4以下である限りルールに合う描画を得るアルゴリズムがある[6]。しかし、グラフの最大次数が4以下というのはかなり厳しい条件である。そこで3角格子にグラフを描くことを試みた。これに対しても4角格子の場合と同様グラフの点は格子点に配置し、辺はすべて格子の線上に描く。そして格子点において2本または3本の辺が交差してもよいが、これらは4角格子におけるルールと同様すべて直進するものとする。

このような描画を与えるアルゴリズムを考案し、実装して試したところ、最大次数が6以下の30点以下のグラフに対しては条件に合うグラフ描画が得られた[7]。しかし、このアルゴリズムにより常に描画が得られることは証明されていない。また、今のプログラムでは点数の増加にともない計算時間が非常に大きくなる問題もある。しかし、最大次数が6以下のグラフまで拡張できたことの意義は大きい。また、この3角格子上の描画を3層配線として実現すれば、実際には交差のない、つまり配線がショートしないような配線ができる(図13)。

次に、アルゴリズムの要点を述べよう。3角格子における格子点 P, Q 間の距離 $d(P, Q)$ は、この2格子点を結ぶ最短道の辺の個数である。格子点の集合 A とこれに含まれない格子点 P に対して、 P と A の距離は $\min_{Q \in A} d(P, Q)$ 、つまり P から最も近い A の格子点までの距離と定義する。たとえば隣接する2点間の距離は1であり、隣接2格子点の集合から距離1の格子点は8個ある。最後に、すでに部分グラフが3角格子上に描画されているとき、この部分グラフに含まれない点 P と部分グラフの点 Q の距離は、 P と Q を結ぶルールに合う道のなかで最短なものに含まれる辺の個数と定義する。

3角格子の直線は、水平直線と右下方向の直線と左下方向の直線の3つに分けられる。線分(2格子点を結ぶ辺)についても同様によび分ける。与えられたグラフの最大次数は6以下とする。するとこのグラフは次のアルゴリズムによって3角格子上に描くことが期待できる[7]。なお、実装したプログラムによる試験では描画が得られた。

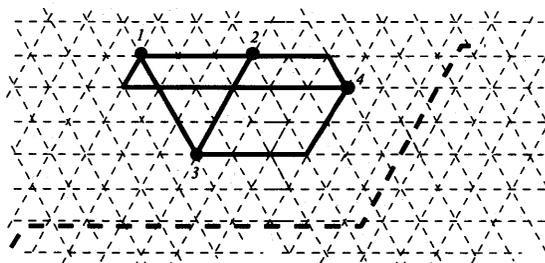


図6：3角格子上におけるグラフの描画

- (1) グラフの点の個数を n とする。グラフのすべての点に次のようにして $1, 2, \dots, n$ の番号を付ける。各整数 $1 \leq i \leq n$ において、番号 $\{1, 2, \dots, i\}$ の付いた点から誘導される部分グラフが連結であるようにする。つまり任意の $1 \leq k \leq n$ に対して、 $1, 2, \dots, k$ の番号の付いた点のどれかと隣接する点に番号 $k+1$ をつける。この番号によりグラフの点を v_1, v_2, \dots, v_n と名付ける。
- (2) 番号1の点 v_1 を3角格子の格子点 P_1 にとる。次に点 P_1 から右に3離れた点を P_2 とし、ここにグラフの点 v_2 を置く。
- (3) 点 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ から誘導される部分グラフはすでに描画されていると仮定する。次の3つ

の条件を満たす格子点の集合 X を求める (図6).

- (i) $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ のもっとも下にある格子点から3下にある水平直線 L_1 を求める.
- (ii) $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ のもっとも右にある格子点から3右にある左下方向の直線 L_2 を求める.
- (iii) L_1 上または L_1 より下にあるか, L_2 上または L_2 より右にある格子点の集合 X をもとめる.

(4) 点 $v_{(k+1)}$ と隣接する $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ にある点を次数の大きい順に $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ と並べる. また u_1, u_2, \dots, u_t の格子点を Q_1, Q_2, \dots, Q_t とおく. X の点 P で

$$d(P, Q_1) + d(P, Q_2) + \dots + d(P, Q_t)$$

が最小になるものを求める. なお, 部分グラフは描画されているので, P と Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-1} を結ぶ道はこの描画とルールがあう道のなかで最短なものを求め, それらの長さを $d(P, Q_i)$ で表わす.

(5) (4) をすべての点が描画されるまで繰り返す.

4 格子におけるポロノイ図

平面上で定義されたポロノイ図とは, 平面上に与えられた n 個の点 P_1, P_2, \dots, P_n に対して, 平面を次の条件を満たすように n 個の領域 X_1, X_2, \dots, X_n にわけることである.

- (i) 各領域 X_i には点 P_i がある.
- (ii) 各領域 X_i の任意の点 Q において $d(Q, P_i) < d(Q, P_j), j \neq i$, となる.

つまり領域 X_i の点から点 P_i までの距離は他の点 P_j までの距離より短く, 点 P_i のテリトリーと言ってもよい領域である. 与えられた点 $\{P_i\}$ は母点とよばれている. また, このような領域の分割図をポロノイ図とよぶ[8].

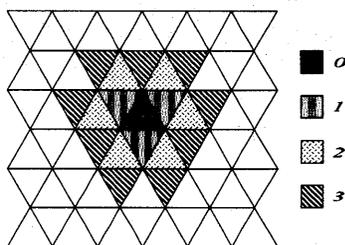


図7: 3角格子における距離の定義, 元のセル, 距離1,2,3のセルの図示

さて, 4角格子とか3角格子においては, 2つのセル P と Q にたいして, この2つのセルを結ぶセルの列

$$(P=P_1, P_2, P_3, \dots, P_{(n-1)}, P_n=Q) \quad P_i \text{ と } P_{(i+1)} \text{ は辺を共有している}$$

を長さ n の道と決める. そして P と Q を結ぶ最短な道の長さを P と Q の間の距離と定義する (図7).

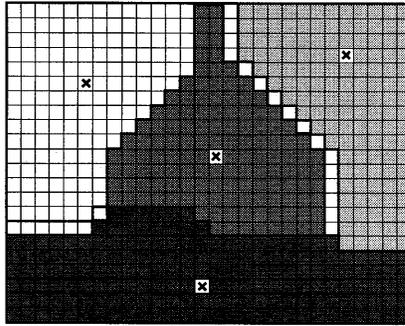


図8：4角格子上におけるポロノイ図

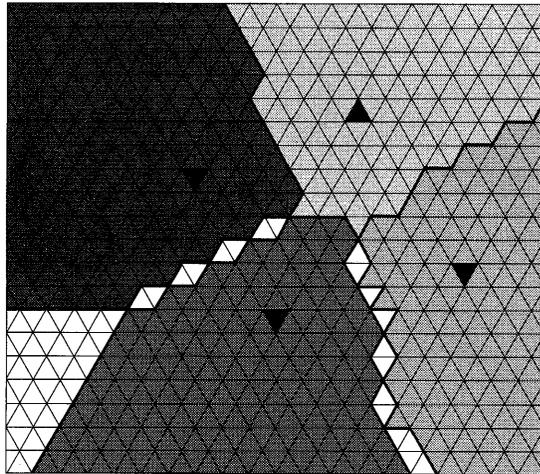


図9：3角格子上におけるポロノイ図；白セルは境界線，[10]

距離が定義できれば、4角格子と3角格子それぞれにおいてポロノイ図を作成することができる。図8と図9にそれぞれの例がある。これからわかるように、4角格子におけるポロノイ図は普通の平面上のポロノイ図と類似しているが、3角格子におけるポロノイ図では境界線が大きな領域となることがあり、これは他では見られない特徴となっている。つまり、2点または3点からの距離が等しい点の集合が領域になることもある[10].

5 配線問題とチャンネル配線問題

ここで考える配線問題は、平面上に与えられたいくつかの点の対 $\{(P_i, Q_i), 1 \leq i \leq n\}$ に対して、点 P_i と Q_i ($1 \leq i \leq n$)を交差しない曲線で結ぶ問題である。

実際には点は4格子点上にあたえられ、結ぶ曲線は格子線上にある線であることが普通である。これに対しては古くから多くの研究がされている。しかし、この問題は4格子に限定する必要はないので、ここでは3角格子上の問題とみなして解いてみた。3角格子の方が4角格子より辺の密度が高く、このような問題にたいしては有利であることが予想される。実際遺伝的アルゴリズムを用いた解法を実装し、実験を行った結果いくつかの例でこのようなことが検証された[11]。また、ここで遺伝的アルゴリズムは4格子におけるものと基本的に同じであり、3角格子であるための特別な工夫はしていない。実際に3角格子の配線が可能であれば、4格子より有効と思われる。

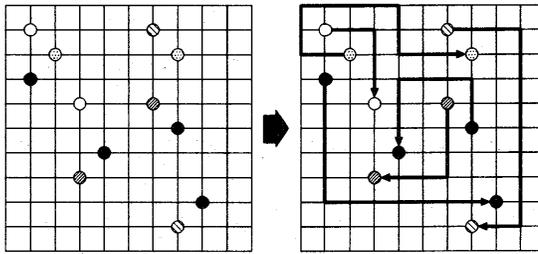


図10：4角格子における配線問題, [11]

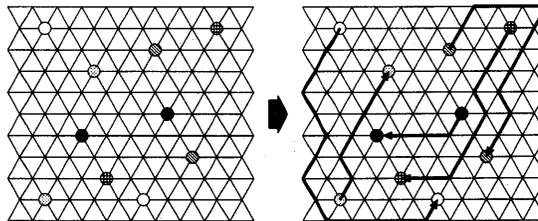


図11：3角格子における配線問題, [11]

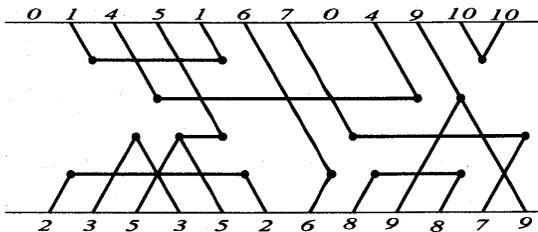


図12：3角格子におけるチャンネル配線問題, [13]

この配線とは別にチャンネル配線問題と呼ばれている問題においても、4角格子上での解法が研究されてきた。これは図12にあるように、上端と下端に結線要求の端子番号が与えており、同じ場号を格子上の線分を利用して結ぶ問題である。その際、

辺は格子点上で交差してもよいが直進する

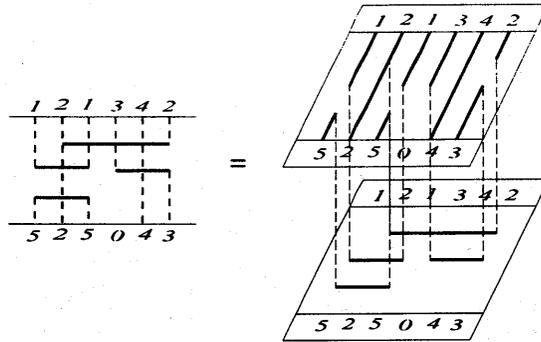


図13：4角格子におけるチャンネル配線問題と2層配線, [12]

というルールがある。このルールにより、実際にこの配線を2層配線すると交差のない、つまりショートしない配線が得られることになる。

前の配線問題と同様、この問題も3角格子上の配線問題として解くこともできる。ただし、この場合には得られた配線は、3層配線として実現することになり、4角格子の場合とは大きな違いがある。実際に遺伝的アルゴリズムを用いたプログラムを実装し、いくつかの問題を解いてみた。その結果は4角格子よりも有利な状況を反映して、良いものが得られた[13]。

参考文献

- [1] パウンドストーン (有澤誠 訳) 「ライフゲームの宇宙」, 日本評論社 (1990)
- [2] 加納幹雄, 佐々木哲也, 藤田宏明, 星誠司, “茨大型ライフゲーム” 「数理解析研究所講究録 No.853 pp.108-117 (1993)
- [3] 佐々木哲也, 藤田宏明, 星誠司, 「茨大型ライフゲーム」, 平成5年度卒業論文 (1994)
- [4] 関山健一, 「茨大型ライフゲームによる紋様の大量生成 (正方形分割)」, 平成6年度卒業論文 (1994)
- [5] 原田大輔, 「茨大型ライフゲームによる紋様の大量生成 (3角形分割)」, 平成6年度卒業論文 (1994)
- [6] G.D.Barrista, P.Eades, R.Tamassia, and I.G.Tollis, *Graph Drawing*, Printice Hall (1999)
- [7] 濱田理恵, 「三角格子上におけるグラフの自動描画」, 平成11年度修士論文 (2000)
- [8] 浅野孝夫, 今井 浩, 「計算とアルゴリズム」 オーム社 (2000)
- [9] 狩野幸仁, 「格子分割におけるボロノイ図」 平成9年度卒業論文 (1998)

- [10] 沖津宏泰, 「平面3角形分割におけるポロノイ図」平成10年度卒業論文 (1999)
- [11] 阿部貴之, 「遺伝的アルゴリズムによる3角格子上的配線問題の解法」平成11年度卒業論文 (2000)
- [12] 岡田信彦, 「遺伝的アルゴリズムによるチャンネル配線問題の解法」平成10年度卒業論文 (1999)
- [13] 染谷顕正, 「遺伝的アルゴリズムによるチャンネル3層配線問題の解法」平成12年度卒業論文 予定 (2001)

(著者：かのう みきお, やなぎ ひでき, あべ たかゆき, おきつ ひろやす, そめや けんしょう, はまだりえ, まつうら りょう, せきやま けんいち, はらだ だいすけ, ささき てつや, ふじた ひろあき, ほし せいじ 茨城大学工学部 受付：平成12年12月22日)