全国学力・学習状況調査の結果に基づく
中学校数学科における典型的な誤答の分析
～「図形」領域の考察～

永田　潤一郎*

Analysis of Typical Incorrect Answers in Junior High School Mathematics on The Result of National Assessment of Academic Ability in Japan: Consideration of “Geometrical Figures”

Junichiro NAGATA

要旨　全国学力・学習状況調査でこれまでに実施された「主として『知識』に関する問題」とその調査結果を見直し，「図形」領域の指導内容のうち知識・技能に関わる課題を分析した．具体的には，平成19年度から平成30年度までの調査結果から，「典型的な誤答が見られる問題」と「関連する問題が出題されている問題」の双方に該当する問題を抽出し，「作図ができる根拠」，「直線と平面の位置関係」，「錐体と柱体の体積の関係」，「同位角や錯角の意味」，「証明の必要性と意味」の５つの課題を見出した．また，調査で見出された課題が長期間固定化する傾向があることや，より積極的に指導の改善を通した対策に取り組む必要があること，「関数」と「データの活用」の領域についても同様の検討が必要であることを指摘した．

キーワード：知識・技能　全国学力・学習状況調査　Ａ問題　学習指導要領　中学校数学科

１．はじめに

令和２年度から小学校で，令和３年度から中学校でそれぞれ全面実施される新しい学習指導要領は，「生きる力」を育むために三つの柱に沿って整理した資質･能力をバランスよく育てることを重視している．これを実現するためには，指導する教師が子どもの思考力・判断力・表現力等と共に，活用すべき知識・技能の育成状況を的確に把握しておくことが必要である．算数・数学科においてそのための重要な指標となるのが，平成19年度から文部科学省が実施している全国学力・学習状況調査（以下，「学力調査」とする）である．学力調査では平成30年度まで，「主として『知識』に関する問題」（以下，「Ａ問題」とする）と，「主として『活用』に関する問題」（以下，「Ｂ問題」とする）とに区分し，別々の問題を用いて調査を実施することで，子どもの知識・技能と思考力・判断力・表現力等の育成の状況を把握してきた．しかし，平成31年度調査からはその枠組みが見直され，知識と活用を一体的に問う調査問題に一本化して置き換えられることになった（文部科学省，2018c）．こうした枠組みの変更は，結果的に従来Ａ問題を用いて捉えてきた基礎的・基本的な知識・技能の育成の状況を把握することが，今後は困難になることを意味する．

こうした点を踏まえ，平成19年度から平成30年

* ながた　じゅんいちろう　文教大学教育学部学校教育課程数学専修

度までに実施された学力調査のうちA問題の調査結果を見直し，子どもが思考力・判断力・表現力等を発揮するために必要な知識・技能の学習の状況に関してどのような課題があることが明らかになったのかを整理しておくことは，新しい学習指導要領の趣旨の実現に向けた指導の改善を考える上でも極めて重要である．ここでは，学力調査のA問題に注目し，その調査結果の分析を通して，これからの中学校数学科における知識・技能の指導で対応すべき課題を明らかにする．

2．分析の視点

（1）これまでの主な分析

本研究における学力調査の分析の視点を明確にするために，これまでに報告されている学力調査の結果の分析に関する資料について確認しておくことにする．

①報告書

学力調査の調査結果の分析は，国立教育政策研究所のサイトで，毎回の調査ごとに学校種別・教科別の報告書にまとめられ公表されている（https://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html，参照：2020.10.22）．この報告書は，それぞれの年度ごとの調査結果やその分析について知る上で極めて有効であるが，複数年度の調査結果やその分析を関連付けて考察しようとする場合は十分な情報を得ることが難しい．

②4年間のまとめ

「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ―児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて―（中学校編）」は，国立教育政策研究所が平成19年度から平成22年度の4年間，すなわち最初の4回の学力調査の調査結果を分析し，成果として認められる内容と，課題として考えられる内容をまとめた資料である．この中で，課題については4年間に実施した調査の問題を例に説明されており，課題を解決するための学習指導のポイントや授業アイディア例なども提案されている（国立教育政策研究所，2012）．①と比較して，この資料では4年間の調査結果を総括して分析しているので課題が一層明確になっている．また，課題については対応策を提案するなど，指導の改善に役立つ資料である．しかし，当然のことながら，4年目以降の調査結果は分析の対象とされていない．なお，国立教育政策研究所は，現時点で4年目以降の調査結果を含めて包括的に分析した資料を発表していない．

③典型的な誤答が見られる問題

①，②の分析は，学力調査の結果を基に，正答率の低い問題と無解答率の高い問題に着目し，課題と考えられる内容を示している点で共通している．これに対して永田は，ある誤答の類型に子どもの解答が集まる傾向が見られる問題を「典型的な誤答が見られる問題」とし，こうした問題から明らかになった課題には，多くの子どもに共通する原因が存在する可能性があると指摘している．従って，その原因を明らかにし，指導を通して改善を図るための方策を検討することは，課題を解決するための具体的な道筋を明らかにすることにつながる．また，学力調査では，出題の趣旨が同じまたは類似する問題が繰り返し出題されており，数は少ないが同一の問題が出題されているケースもある．永田はこうした問題を「関連する問題」とし，関連する問題が出題されているのは，調査結果から見出した課題の原因をより一層明確にしようとする出題者側の意識の表れであると共に，全国の中学校で数学を指導する教師へ向けた指導を通じての改善を求めるメッセージであると解釈している．そして，こうした視点から平成19年度から平成30年度までの学力調査のA問題で出題された中学校数学科「数と式」領域に関する問題のうち，典型的な誤答が見られる問題と関連する問題の両方に当てはまる問題を取り上げ，子どもの学習の現状と課題の分析を行っている（永田潤一郎，2019）．

3.「図形」領域の課題

本研究では，２（１）の③で紹介した視点に立ち，平成19年度から平成30年度までの学力調査のＡ問題で出題された問題のうち，「図形」領域の内容に関する131題を対象に，典型的な誤答が見られる問題と関連する問題の両方に当てはまる問題を整理した．そして，そこから読み取ることができる課題として，以下の５点について考察する．

（１）作図ができる根拠

①学習指導要領の位置付け

作図は第１学年で指導する平面図形の内容であり，学習指導要領の内容Ｂ（１）のうち，ア（ア）とイ（ア）に位置付けられている（文部科学省，2018a）．ここでは，知識・技能の習得の観点から，子どもが角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線などの基本的な作図の方法を理解できるようにすることが求められている．その指導においては，教師が作図の方法を一方的に与えるのではなく，子どもが図形の対称性や図形を決定する要素に着目して作図の方法を見いだし，その方法を図形の性質や関係に基づいて説明する活動が重視されている．また，こうした指導を通じて，子どもの論理的に考察し表現する力を養うことも求められている．つまり，「どうやって作図するのか」という作図の方法だけでなく，「なぜその方法で作図できるのか」という作図ができる根拠についても子どもが理解できるように指導する必要がある．なお，ここで作図の根拠として用いられる図形の対称性や対称な図形の性質，「線対称」，「点対称」，「対称の軸」，「対称の中心」といった用語については，小学校第６学年で指導されている．

②該当する問題

表１は，作図ができる根拠の理解について課題が読み取れる問題をまとめたものである．表の中の「形式」とは問題の解答形式を意味し，「選択」は複数の選択肢から正しいものを選択する形式の問題である．学力調査ではこれまでに，子どもに作図をすること自体を求める問題が出題されたことはない．これは，定規やコンパスを忘れた生徒がいた場合の対応や，採点の困難さが原因ではないかと考えられる．このため，ここで取り上げたように作図の方法自体は示した上で，これで目的の作図ができる根拠としてどのような図形の性質が用いられているかを問う問題が繰り返し出題されている．こうした出題が重視されるのは，第２学年の「図形」領域の指導内容である図形の性質

表１　作図ができる根拠

年度	問題	問題の概要	形式	出題の趣旨	正答率	無答率	典型的な誤答	反応率	備考
20	$\boxed{4}$（2）	垂線の作図方法を見て，作図に用いられている対称な図形の性質を選ぶ.	選択	垂線の作図方法を図形の対称性に着目して見直すことができる.	52.1%	1.4%	点Ｑを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている（選択肢ウ）.	15.8%	
							直線ＡＢを対称軸とする線対称な図形の性質を用いている（選択肢エ）.	24.6%	
25	$\boxed{4}$（2）	角の二等分線の作図方法を見て，作図ができる理由を選ぶ.	選択	角の二等分線の作図の根拠となる対称な図形を見出すことができる.	49.6%	1.0%	誤った点を対称の中心とする点対称な図形である.	22.6%	
27	$\boxed{4}$（1）	垂線の作図方法を見て，作図に用いられている対称な図形の性質を選ぶ.	選択	垂線の作図方法を図形の対称性に着目して見直すことができる.	59.6%	1.0%	点Ｑを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている（選択肢ウ）.	15.1%	H20年度調査$\boxed{4}$（2）と同一問題
							直線ＡＢを対称軸とする線対称な図形の性質を用いている（選択肢エ）.	19.2%	

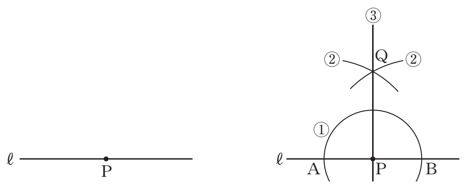
の証明を見通して，根拠を明らかにし筋道立てて考えさせることで論理的に考察し表現する力が培われているかどうかを確かめようとしているものと考えられる．

表から分かる通り，平成20年度と平成27年度の調査の問題は同一であり，垂線の作図が取り上げられている．これに対し，平成25年度調査の問題では角の二等分線の作図が取り上げられている．図１は，平成20年度調査の問題である．平成25年度調査の問題も，出題の趣旨及び出題の形式は基本的にこれと共通している．

（２）直線 ℓ 上の点Ｐを通る ℓ の垂線を，下の①，②，③の手順で作図しました。

作図の方法

①　点Ｐを中心として，適当な半径の円をかき，ℓ との交点をそれぞれ点Ａ，点Ｂとする。
②　点Ａ，点Ｂを中心として，等しい半径の円を交わるようにかき，その交点の１つを点Ｑとする。
③　点Ｐと点Ｑを通る直線をひく。



この作図の方法は，対称な図形の性質を用いているとみることができます。どのような性質を用いているといえますか。下の**ア**から**オ**の中から正しいものを１つ選びなさい。

ア　点Ａを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている。
イ　点Ｂを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている。
ウ　点Ｑを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている。
エ　直線ＡＢを対称軸とする線対称な図形の性質を用いている。
オ　直線ＰＱを対称軸とする線対称な図形の性質を用いている。

図１　平成20年度調査 $\boxed{4}$（２）

③考察

平成20年度と平成27年度の調査結果を比較すると，７年間の指導の成果として若干の改善が見られるものの，典型的な誤答には変化が見られない．また，この問題については２つの典型的な誤答が存在するが，その特徴は異なっている．選択肢エの「直線ＡＢを対称軸とする線対称な図形の性質を用いている」を選択した子どもの中には，作図の方法として線対称な図形の性質を用いていることまでは理解しているが，対称軸という用語の意味を理解できていない場合があると考えられる．これに対して，選択肢ウの「点Ｑを対称の中心とする点対称な図形の性質を用いている」を選択した子どもの中には，線対称な図形の性質と点対称な図形の性質の区別がついていない場合があると考えられる．同じ典型的な誤答であっても原因が異なっている可能性が高いので，指導に際してはこの点を見極める必要がある．また，平成25年度調査の問題では，作図の対象として角の二等分線が取り上げられており，平成20年度と平成27年度の調査問題と同様に，線対称な図形の性質が作図の根拠として用いられている．しかし，典型的な誤答は点対称な図形の性質を用いているとするものであり，線対称な図形の性質を用いたとする誤答の合計を上回っている．このように，作図の対象が変わると，子どもの誤答の傾向にも変化が見られる結果となっている．

なお，今後はこうした典型的な誤答に陥っている子どもが，実際に垂線や角の二等分線を作図することができるかどうかについても確認すべきである．学力調査の「数と式」領域に関する考察では，子どもの技能と知識の学習の状況に大きな差異が生じている場合があることが明らかになっている（永田潤一郎，2019）．同じような視点から考えると，作図はできる（技能は身についている）が，なぜ作図できるのかは分からない（知識は身についていない）子どもが増えていることが懸念される．

（２）直線と平面の位置関係

①学習指導要領の位置付け

直線と平面の位置関係は，第１学年で指導する空間図形の内容であり，学習指導要領の内容Ｂ（２）のうち，ア（ア）に位置付けられている（文部科学省，2018a）．空間における直線や平面

の位置関係を知ることは，空間図形を考察する際に基本となるものであり，空間図形について分析的に捉えるための基盤になる内容である．小学校算数科でも，直方体などに関連して，直線や平面の平行や垂直の関係について指導しているが，これは具体的な立体の構成要素としての辺や面の位置関係を扱ったものである．これに対して中学校では，具体的な空間図形を扱いながらも，抽象化された直線や平面の位置関係について指導する．

②該当する問題

表２は，直線と平面の位置関係に関する課題が読み取れる問題をまとめたものである．なお，表の中の「形式」の欄に「短答」とある問題は，数値や用語などを主として単語で答える形式の問題を意味する．表２に示した問題は，２つのグループに分けられる．１つは直方体の見取図を提示し，直線や平面の位置関係についての条件に当てはまる辺や面を答えさせる問題であり，平成19年度，平成27年度，平成29年度の問題がこれに当たる．図２はこのうち平成27年度調査の問題である．もう１つは立体の見取図を提示し，直線や平面の位置関係について正しい内容を述べた選択肢を選ばせる問題であり，平成24年度，平成25年度の問題がこれに当たる．図３はこのうち平成24年度調査の問題である．なお，平成25年度調査の問

次の（１）から（４）までの各問いに答えなさい。

（１）下の図の直方体には辺CGに垂直な面がいくつかあります。そのうちの１つを選んで書きなさい。

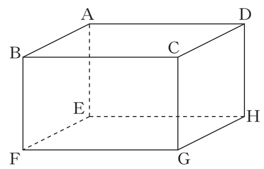
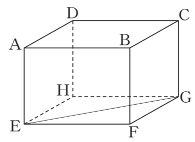


図２　平成27年度調査 $\boxed{5}$（１）

次の（１）から（４）までの各問いに答えなさい。

（１）右の図のような直方体があります。EGは長方形EFGHの対角線です。このとき，∠AEGの大きさについてどのようなことがいえますか。下のアからエまでの中から正しいものを１つ選びなさい。



ア　∠AEGの大きさは，90°より大きい。

イ　∠AEGの大きさは，90°より小さい。

ウ　∠AEGの大きさは，90°である。

エ　∠AEGの大きさが90°より大きいか小さいかは，問題の条件だけでは決まらない。

図３　平成24年度調査 $\boxed{5}$（１）

表２　直線と平面の位置関係

年度	問題	問題の概要	形式	出題の趣旨	正答率	無答率	典型的な誤答	反応率
19	$\boxed{5}$（1）②	指定された直方体の辺とねじれの位置にある辺を１つ答える．	短答	空間における直線の位置関係について理解している．	70.9%	4.4%	平行な辺を解答している．	18.0%
24	$\boxed{5}$（1）	指定された直方体の角の大きさについて正しいものを選ぶ．	選択	直方体における辺と面に含まれる直線との位置関係を理解している．	62.5%	0.6%	90°の角を，「90°より小さい」とする選択肢（選択肢イ）を選んでいる．	21.6%
25	$\boxed{5}$（1）	示された立体の辺を含む２直線の位置関係について正しいものを選ぶ．	選択	空間における２直線の位置関係を理解している．	57.5%	1.1%	平行な２直線を「交わる」とした選択肢を選んでいる．	19.6%
27	$\boxed{5}$（1）	指定された直方体の辺と垂直な面を１つ答える．	短答	空間における直線と平面の垂直について理解している．	47.9%	1.9%	指定された辺を含む面を解答している．	36.0%
29	$\boxed{5}$（1）	指定された直方体の辺と平行な面を１つ答える．	短答	空間における直線と平面の平行について理解している．	67.5%	2.9%	指定された辺を含む面を解答している．	18.0%

題では直方体以外の立体（直方体から三角柱を切り取ってつくった立体）が取り上げられ，その見取図が示されているがここでは省略する．

③考察

平成19年度，平成27年度，平成29年度の調査問題とその調査結果からは，一言で「直線と平面の位置関係」といっても，「直線と直線の位置関係」か，「直線と平面の位置関係」かで子どもの理解の状況に異なる特徴があることが読み取れる．

直線と直線の位置関係については，平成19年度の調査結果から，ねじれの位置の理解に課題があることが分かる．全体の18.0％の子どもが平行な直線を解答したのは，ねじれの位置を２直線が交わらない関係と理解しているためかもしれない．こうしたねじれの位置の理解に関する課題は，その指導の場面が２直線の平行や垂直に比べて限定されていることとも関係しているのではないかと考えられる．前述した通り，小学校算数科でも直方体などを用いて平行や垂直といった位置関係について指導しているが，あくまで有限の世界の線分の位置関係についてであり，ねじれの位置については取り上げられておらず，中学校第１学年で初めて指導される．

直線と平面の位置関係については，平成27，29年度の調査結果から，指定された辺を含む面を解答している子どもが最も多くなっており，位置関係の理解そのものに課題があることが分かる．直線と平面の位置関係について，中学校第１学年の教科書では，例えば図４のように分類整理されており（岡本和夫他，2017），直線が平面上にある場合が，交わる場合や平行である場合と区別して指導されている．しかし，調査結果からはこうした点が定着しておらず，空間における直線や面といった抽象性の高い内容を理解することに難しさを感じている子どもが少なくないことが分かる．

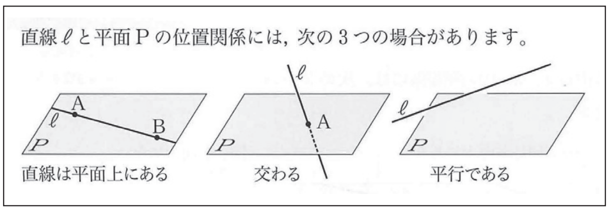


図４　直線と平面の位置関係

また，平成24年度と平成25年度の調査問題とその調査結果からは，見取図を用いて空間における直線と平面の位置関係を捉えること自体に関する課題を読み取ることができる．図３の平成24年度調査の問題では，選択肢イの「∠AEGの大きさは，90°より小さい」を選んだ子どもが21.6％いる．確かに，∠AEGを平面上の角とみればその大きさは90°より小さいが，直方体の見取り図上の角とみることで，90°であると解釈することができる．こうした捉え方ができない子どもに，見取図を用いて辺と面の位置関係を考えさせても，正しい解答を引き出すことは難しいであろう．直線と平面の位置関係に関する課題の改善に向けては，位置関係そのものの理解に課題がある子どもだけでなく，３次元の世界にある立体を２次元の世界で表した見取図を使って捉えることができない子どもの実態にも目を向ける必要がある．

（３）錐体と柱体の体積の関係

①学習指導要領の位置付け

柱体や錐体の表面積と体積を求めることは，第１学年で指導する空間図形の内容であり，学習指導要領の内容Ｂ（２）のうち，ア（イ）とイ（イ）に位置付けられている（文部科学省，2018a）．このうち，立体の体積を求めることについては小学校においても角柱や円柱について指導しているが，錐体の体積は中学校で初めて取り上げる内容である．錐体の体積については，それと底面積と高さが等しい柱体の体積の $\frac{1}{3}$ であることを指導する．このことを子どもが論理的に確かめるためには，高等学校における積分の学習が必要になる．中学校においては，錐体の体積と柱体の体積との関係を子どもに予想させ，その予想が正しいかどうかを，模型を用いたり実験による測定を行ったりするなどして確かめ，実感を伴って理解

できるようにすることが求められている．

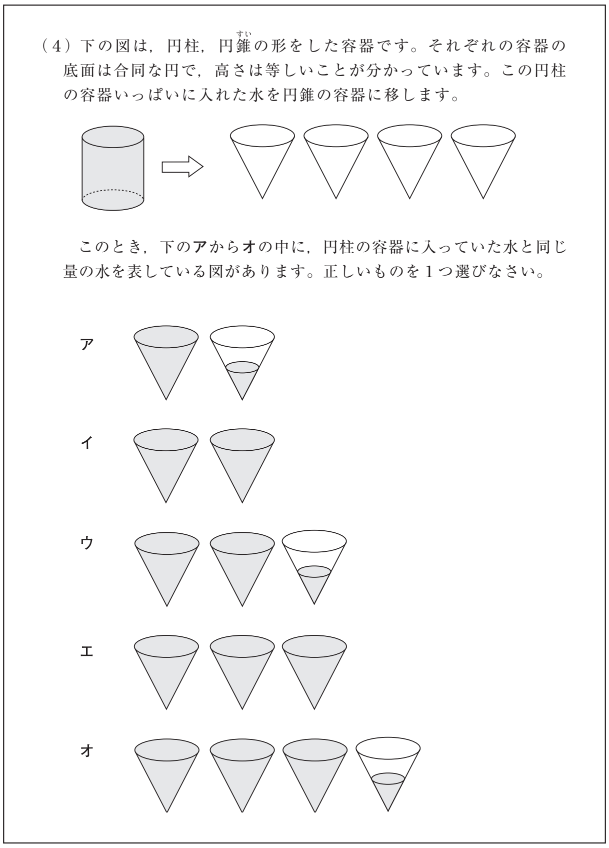
②該当する問題

表３は，錐体と柱体の体積の関係に関する課題が読み取れる問題をまとめたものである．この課題については，典型的な誤答が見られる問題と関連する問題の両方に当てはまる問題が，同一問題を含め６題ある．特徴的なのは，この６題の問題に対する子どもの典型的な誤答が全て同じ原因に基づいていると考えられる点である．

図５は，表３のうち平成19年度調査の問題である（従って，平成26年度調査の問題とも同一である）．この問題では，円柱や円錐の形をした容器に関する高さや体積といった数値情報を全く与えず，円柱の容器いっぱいに入れた水を円錐の容器に移すとき，円柱の容器に入った水と同じ量の水を表した図を選ぶことを子どもに求めている．なお，翌年に行われた平成20年度調査ではこれとは全く逆の操作を取り上げた問題が出題されている．すなわち，円錐の容器いっぱいに入れた水を円柱の容器に移すとき，円錐の容器に入った水と同じ量の水を表した図（円柱の容器の側面に，等間隔の目盛りがつけられている）を選択させるも

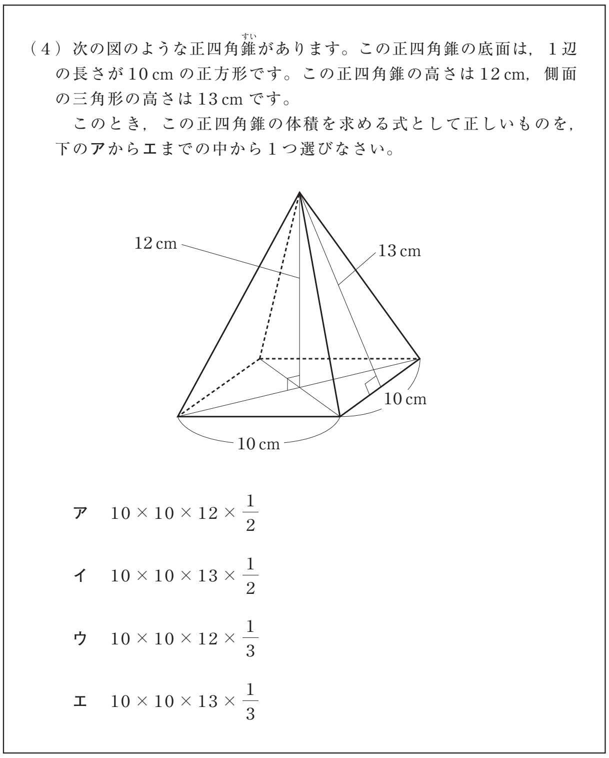
表３　錐体と柱体の体積の関係

年度	問題	問題の概要	形式	出題の趣旨	正答率	無答率	典型的な誤答	反応率	備考
19	5（4）	円柱の容器いっぱいの水を底面が合同で高さが等しい円錐の容器に移したときの図として正しいものを選ぶ．	選択	円錐の体積を，底面が合同で高さが等しい円柱の体積との関係で理解している．	38.1％	0.8％	２杯分の図を選択している．	36.7％	
20	5（2）	円錐の容器いっぱいの水を底面が合同で高さが等しい円柱の容器に移したときの図として正しいものを選ぶ．	選択	円錐の体積を，底面が合同で高さが等しい円柱の体積との関係から理解している．	52.4％	0.6％	半分の図を選択している．	36.5％	
24	5（4）	底面の１辺が10cmで高さが12cmの正四角錐の体積を求める式として正しいものを選ぶ．	選択	正四角錐の体積の求め方を理解している．	63.1％	0.7％	$10\times10\times12\times\dfrac{1}{2}$ を選択している．	23.6％	
26	5（4）	円柱の容器いっぱいの水を底面が合同で高さが等しい円錐の容器に移したときの図として正しいものを選ぶ．	選択	円錐の体積を，底面が合同で高さが等しい円柱の体積との関係で理解している．	39.8％	0.7％	２杯分の図を選択している．	34.3％	H19年度調査5（4）と同一問題
28	5（4）	円柱の体積が600㎤のとき，それと底面が合同で高さが等しい円錐の体積を求める．	短答	円錐の体積は，それと底面が合同で高さが等しい円柱の体積の$\dfrac{1}{3}$であることを理解している．	51.0％	13.9％	300㎤と解答している．	21.1％	
30	5（4）	四角錐の体積が，底面が合同で高さが等しい四角柱の体積の何倍であるについて正しいものを選ぶ．	選択	四角錐の体積は，それと底面が合同で高さが等しい四角柱の体積の$\dfrac{1}{3}$であることを理解している．	58.5％	0.5％	$\dfrac{1}{2}$倍を選択している．	18.2％	


（4）下の図は，円柱，円錐の形をした容器です。それぞれの容器の底面は合同な円で，高さは等しいことが分かっています。この円柱の容器いっぱいに入れた水を円錐の容器に移します。

このとき，下の**ア**から**オ**の中に，円柱の容器に入っていた水と同じ量の水を表している図があります。正しいものを１つ選びなさい。

図５　平成19年度調査5（4）


（4）次の図のような正四角錐があります。この正四角錐の底面は，１辺の長さが10 cm の正方形です。この正四角錐の高さは12 cm，側面の三角形の高さは13 cm です。

このとき，この正四角錐の体積を求める式として正しいものを，下の**ア**から**エ**までの中から１つ選びなさい。

ア　$10 \times 10 \times 12 \times \frac{1}{2}$

イ　$10 \times 10 \times 13 \times \frac{1}{2}$

ウ　$10 \times 10 \times 12 \times \frac{1}{3}$

エ　$10 \times 10 \times 13 \times \frac{1}{3}$

図６　平成24年度調査5（4）

のである．①でも述べた通り，こうした操作活動は，子どもが錐体の体積と柱体の体積との関係を実感を伴って理解できるようにするため，従来から多くの数学の授業において広く行われているものであり，教科書でも写真やイラストを掲載してその過程が紹介されている．

これに対して図６は，平成24年度調査の問題である．この問題では正四角錐の見取図を示し，問題文と見取図で正四角錐の底面の１辺の長さと高さ及び側面の三角形の高さの数値を与えた上で，正四角錐の体積を求める式を子どもに選択させている．

③考察

②でも触れた通り，表３にまとめた６題の問題に対する子どもの典型的な誤答は，全て「錐体の体積は，それと底面積と高さが等しい柱体の体積の $\frac{1}{2}$ である」ことに基づいていると考えられる．このうち，既に触れた通り平成19年度調査と平成26年度調査の問題は同一であるが，その正答率，無答率，典型的な誤答の反応率は，７年間の隔たりがあってもほとんど変わっておらず，正答率と典型的な誤答の反応率の差は，２～６ポイント程度である．また，平成24年度調査の問題は，表３にまとめた問題の中では唯一，錐体の体積を求める公式を選択させるものであるが，選択肢アの「$10\times10\times12\times\frac{1}{2}$」を選択した子どもが23.6％いた．「$10\times10\times12$」は，見取図の正四角錐と底面積と高さが等しい四角柱の体積を求める式である．この問題では側面の三角形の高さ13cmが与えられているが，この問題を解くためには必要ない情報である．この13cmを含む選択肢イの「$10\times10\times13\times\frac{1}{2}$」と，選択肢エの「$10\times10\times13\times\frac{1}{3}$」を選んだ子どもがそれぞれ8.8％と3.8％しかいないことから，多くの子どもは柱体の体積

の求め方を理解しており，錐体の体積を柱体の体積との関係で捉えることはできていると考えられる．ではなぜ，「錐体の体積は，それと底面積と高さが等しい柱体の体積の $\frac{1}{2}$ である」と考える子どもの多い状態が，これだけ長期間続いているのだろうか．これには，２次元の世界における数量の関係をそのまま３次元の世界に適用する子どもの誤りが改善されていない状況が続いているためではないかと考えられる．図７は底辺の長さと高さが等しい長方形と二等辺三角形の面積の関係を表したものであり，二等辺三角形の面積は長方形の面積の $\frac{1}{2}$ である．

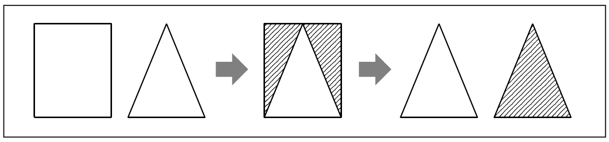


図７　長方形と二等辺三角形の面積の関係

つまり，典型的な誤答に陥っている子どもは，平面における長方形と二等辺三角形の面積の関係から類推して，空間における柱体と錐体の体積の関係にそのまま適用しているのではないかということである．

こうした現状を考えると，授業に前述したような実験を取り入れ，柱体と錐体の体積の測定を行って結果を確かめるだけでは，子どもの理解は深まらないのかもしれない．教師が「錐体の体積は，それと底面積と高さが等しい柱体の体積の $\frac{1}{2}$ である」ことが誤りであることを意図的に取り上げて指導を工夫することも必要なのではないだろうか．

（４）同位角や錯角の意味

①学習指導要領の位置付け

同位角や錯角の意味を理解することは，第２学年で指導する基本的な平面図形の性質のうち，平行線や角の性質に関する指導内容であり，学習指導要領の内容Ｂ（１）のうち，ア（ア）に位置付けられている（文部科学省，2018a）．ここでは，平行線の性質として「平行な２直線に他の直線が交わったときにできる同位角は等しい」ことと「平行な２直線に他の直線が交わったときにできる錯角は等しい」ことを指導する．また，平行線になるための条件として「２直線に他の直線が交わってできる同位角が等しければ，この２直線は平行である」ことと「２直線に他の直線が交わってできる錯角が等しければ，この２直線は平行である」ことを指導する．これらは，その後に続く図形の性質を証明することの指導において，子どもが根拠として用いる事柄である．

②該当する問題

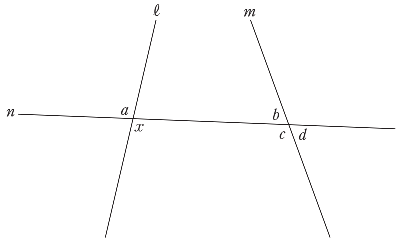
表４は，同位角や錯角の意味を理解することに関する課題が読み取れる問題をまとめたものである．平成21年度調査では同位角，平成29年度調査

表４　同位角や錯角の意味

年度	問題	問題の概要	形式	出題の趣旨	正答率	無答率	典型的な誤答	反応率
21	$\boxed{6}$（1）	示された角の同位角について正しいものを選ぶ．	選択	同位角の意味を理解している．	42.0%	0.8%	対頂角を選んでいる（選択肢ア）．	22.9%
							「同位角はない」を選んでいる（選択肢オ）．	22.8%
29	$\boxed{6}$（1）	示された角の錯角について正しいものを選ぶ．	選択	錯角の意味を理解している．	42.6%	0.5%	対頂角を選んでいる（選択肢ア）．	12.2%
							「錯角はない」を選んでいる（選択肢カ）．	32.8%

$\boxed{6}$ 次の（1），（2）の各問いに答えなさい。

（1）次の図のように，2つの直線 ℓ，m に1つの直線 n が交わっています。
このとき，$\angle x$ の同位角について，下の**ア**から**オ**までの中から正しいものを1つ選びなさい。



ア　$\angle x$ の同位角は $\angle a$ である。

イ　$\angle x$ の同位角は $\angle b$ である。

ウ　$\angle x$ の同位角は $\angle c$ である。

エ　$\angle x$ の同位角は $\angle d$ である。

オ　$\angle x$ の同位角は $\angle a$ から $\angle d$ までの中にはない。

図８　平成21年度調査$\boxed{6}$（１）

では錯角がそれぞれ取り上げられている．図８は，表４のうち平成21年度調査の問題である．平成29年度調査の問題も基本的にこれと同じ構成で，「同位角」の部分が「錯角」に改められ，誤答の選択肢が１つ増やされている（平成21年度調査の問題の図の $\angle c$ の対頂角を $\angle e$ として，新たに $\angle e$ に関する選択肢を設けている）．

③考察

表４にまとめた２つの問題は，取り上げている角が同位角と錯角で異なるが，２つの典型的な誤答が共通しており，その反応率の合計は正答率を上回る点も共通している．１つは同位角や錯角を対頂角と混同している誤答である．平成21年度調査と平成29年度調査のいずれの問題においても選択肢アがこれにあたる．対頂角は同位角や錯角と共に中学校第２学年の「図形」領域において指導されている．対頂角が等しいことは，①で示した平行線の性質や平行線になるための条件と共に，子どもが図形の性質を証明する学習の中で証明の根拠として利用されることになる．この調査結果からは，同位角や錯角を対頂角と区別できていない子どもがいることが分かる．

もう１つの典型的な誤答は，図に示された角の中には，指定された角の同位角または錯角はないとする誤答である．平成21年度調査の問題の選択肢オと平成29年度調査の問題の選択肢カがこれにあたる．多くの子どもがこうした誤答に陥るということは一見大変に不可解に感じられるが，その理由は同位角または錯角を２つの角の位置関係として理解することができていないことにあると考えられる．「角」については小学校算数科において，同じ点を端点とする２つの半直線がつくる図形，または１つの半直線がその端点を中心として回転してできる図形として指導されている．つまり，角は１つの図形を指す用語であり，「直角」はその例である．しかし，同位角や錯角，対頂角は，同じ「角」という言葉が用いられていてもこれまでとは異なり，２つの角の位置関係を表す用語である．この典型的な誤答に該当する子どもは，このことが理解できていない場合があると考えられる．そして，同位角や錯角は２つの角の位置関係を表す用語であり，それらの角をつくる３直線のうち２直線が平行であるかどうかには関係ない．しかし，この典型的な誤答に該当する子どもは，このことが理解できていない場合もあると考えられる．①で述べた通り，同位角と錯角は，第２学年において平行線の性質や平行線になるための条件を指導する中で取り扱われ，その後の図形の性質の証明に関する指導の中で繰り返し証明の根拠として用いられている．こうした経験から，同位角と錯角が平行線との関係で子どもの中に印象深く残り，２直線が平行である場合についてのみ同位角と錯角が存在すると考える子どもが出てくる．このため，こうした子どもは図８に示したような２直線 ℓ と m が平行ではない図では，同位角や錯角が存在しないと判断しているのではないかと考えられるのである．平成29年度調査 $\boxed{6}$（１）の問題で示されている図も，図８と同じように２直線 ℓ と m が平行ではない．なお，このことを裏付ける資料として，平成27年度調査 $\boxed{6}$（１）の問題と調査結果が参考になる．こ

の問題では，図８の平成21年度調査 $\boxed{6}$（１）の問題のうち，図だけが $\ell // m$ に変えられている．その調査結果は，正答率が80.4％であり，選択肢オの「同位角はない」の反応率は0.9％であった．学習指導要領では，第２学年において対頂角を「用語・記号」に定めているが，同位角と錯角はこれに含まれていない．しかし，ここで取り上げた問題とその調査結果からは，２つの角の位置関係としての同位角と錯角の理解に課題があることは明らかである．平行線の性質や平行線になるための条件の指導の前提として，その意味の理解の指導を見直す必要がある．

（５）証明の必要性と意味

①学習指導要領の位置付け

証明の必要性と意味を理解することは，第２学年で指導する図形の合同の内容であり，学習指導要領の内容Ｂ（２）のうち，ア（イ）に位置付けられている（文部科学省，2018a）．証明とは，常に成り立つことが認められている事柄を根拠にして，仮定から結論を導くことである．子どもが証明の必要性を理解できるようにするためには，観察や操作，実験などの活動から帰納的に導かれたものと，演繹的に導かれたものとの違いを理解できるようにする必要がある．例えば，幾つかの図

表５　証明の必要性と意味

年度	問題	問題の概要	形式	出題の趣旨	正答率	無答率	典型的な誤答	反応率
19	$\boxed{7}$	平行四辺形の性質の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の意義について理解している.	73.6%	1.2%	他の平行四辺形については，もう一度証明する必要がある（選択肢イ）.	14.2%
20	$\boxed{8}$	平行四辺形について成り立つ事柄の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の意義について理解している.	58.3%	1.3%	形の違う平行四辺形については，改めて証明する必要がある（選択肢イ）.	29.2%
21	$\boxed{8}$	「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の意義について理解している.	29.7%	1.2%	①も②も証明できている（選択肢ア）.	22.9%
							②もたくさんの三角形で確かめれば証明したことになる（選択肢イ）.	32.6%
22	$\boxed{8}$	図形の性質の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の意義について理解している.	50.0%	1.3%	形の違う図形については，改めて証明する必要がある（選択肢イ）.	37.2%
24	$\boxed{8}$	図形の性質の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の意義について理解している.	65.6%	1.0%	形の違う図形については，改めて証明する必要がある（選択肢イ）.	24.4%
25	$\boxed{8}$	図形の性質の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の必要性と意味を理解している.	64.7%	1.0%	形の違う図形については，改めて証明する必要がある（選択肢イ）.	24.2%
27	$\boxed{8}$	「対頂角は等しい」ことの証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の必要性と意味を理解している.	26.4%	1.2%	①も②も証明できている（選択肢ア）.	21.3%
							②も角度をいろいろ変えて確かめれば証明したことになる（選択肢イ）.	28.4%
28	$\boxed{8}$	図形の性質の証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の必要性と意味を理解している.	62.3%	1.2%	形の違う図形については，改めて証明する必要がある（選択肢イ）.	25.6%
30	$\boxed{8}$	「対頂角は等しい」ことの証明について正しいものを選ぶ.	選択	証明の必要性と意味を理解している.	46.1%	0.6%	①も②も証明できている（選択肢ア）.	39.0%
							①は証明できていないが，②は証明できている（選択肢ウ）.	11.6%

形から帰納的に見いだした事柄が常に成り立つかどうかを，同じ条件を満たす他の図形で調べることで，その事柄の妥当性を高めさせる．しかし，これを繰り返しても同じ条件を満たす全ての図形についてその事柄が成り立つかどうかを調べつくすことはできない．こうした経験を通して，演繹的な推論による証明が必要であり，証明はある事柄が常に成り立つことを明らかにする方法であることを子どもが理解できるようにする．この際，証明のためにかかれた図形が，同じ条件を満たす全ての図形の代表として示されていることを理解できるようにすることも必要になる．なお，三角形や平行四辺形の基本的な性質を，既習の三角形の合同条件などを根拠にして証明することは，学習指導要領の内容Ｂ（２）のうちイ（ア）に位置付けられている．学力調査では証明することに関する子どもの学習の状況をＢ問題で調査することとしているので，本論文では取り上げないこととする．

②該当する問題

表５は，証明の必要性と意味を理解することに関する課題が読み取れる問題をまとめたものである．該当する問題は９問であり，本論文で取り上げた５つの課題の中で最も多い．また，ここで対象としているのは，平成19年度から平成30年度までに行われた11回の学力調査（平成23年度は未実施）のＡ問題であるから，該当する問題が出題されなかったのは２回の調査だけであり，出題者側の極めて強い拘りがうかがわれる．なお，表５の「出題の趣旨」について，平成24年度調査までの「証明の意義」という表現が，平成25年度調査以降「証明の必要性と意味」に改められているのは，平成20年に改訂された学習指導要領で表現が改められ，平成24年度から中学校で全面実施されたことを受けたものである．図９と図10は，表５のうち，それぞれ平成21年度調査と平成22年度調査の問題である．

③考察

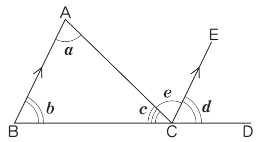
表５にまとめた９つの問題は，いずれも子どもの証明の必要性と意味についての理解の状況をみるためのものであるが，その「必要性と意味」として何を捉えようとしているのかという視点から，次のＡとＢの２つのグループに分類することができる．

・Ａグループ…実測や操作などの帰納的な方法に

8　ある学級で，「三角形の内角の和は180°である」ことの証明について，次の①，②を比べて考えています。

①

下の図の△ABCで，
辺BCを延長した直線上の点をDとし，点Cを通り辺BAに平行な直線CEをひく。



平行線の錯角は等しいから，　$\angle a=\angle e$
平行線の同位角は等しいから，　$\angle b=\angle d$
したがって，

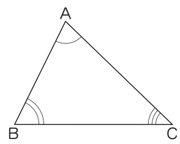
$$\angle a+\angle b+\angle c=\angle e+\angle d+\angle c = 180°$$

よって，三角形の内角の和は180°である。

②

下の図の△ABCで，
３つの角の大きさをそれぞれ測ると，

$\angle A = 72°$
$\angle B = 64°$
$\angle C = 44°$



したがって，

$$\angle A+\angle B+\angle C = 72°+64°+44° = 180°$$

よって，三角形の内角の和は180°である。

どんな三角形でも内角の和は180°であることの証明について，下のアからオまでの中から正しいものを１つ選びなさい。

ア　①も②も証明できている。

イ　①は証明できており，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

ウ　①は証明できているが，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことにはならない。

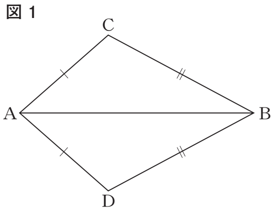
エ　①も②も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ　①は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが，②はそれでも証明したことにはならない。

図９　平成21年度調査8

$\boxed{8}$　ある学級で，**図１**について，「AC＝AD，BC＝BDならば∠ACB＝∠ADBである」ことを，下のように証明しました。

図１

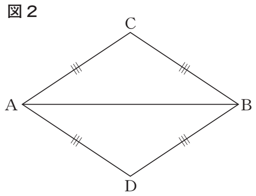


証明

△ABCと△ABDにおいて，
仮定から，　AC＝AD　……①
　　　　　　BC＝BD　……②
共通な辺だから，　AB＝AB　……③
①，②，③より，３辺がそれぞれ等しいから，
　　△ABC≡△ABD
合同な図形の対応する角は等しいから，
　　∠ACB＝∠ADB

この証明のあと，**図２**のようにAC，AD，BC，BDの長さがすべて等しい場合についても，同じように∠ACB＝∠ADBとなるかどうかを考えてみたところ，下の**ア**から**エ**までのような意見が出ました。正しいものを１つ選びなさい。

図２



ア　**図２**の場合も，∠ACB＝∠ADBであることは，すでに前ページの証明で示されている。

イ　**図２**の場合は，∠ACB＝∠ADBであることを，改めて証明する必要がある。

ウ　**図２**の場合は，∠ACB＝∠ADBであることを，それぞれの角度を測って確認しなければならない。

エ　**図２**の場合は，∠ACB＝∠ADBではない。

図10　平成22年度調査$\boxed{8}$

よる説明と演繹的な推論による証明は異なること．

・Ｂグループ…証明のためにかかれた図形は，同じ条件を満たす全ての図形の代表として示されているので，同じ条件を満たす他の図形について改めて証明し直す必要はないこと．

表５の９つの問題のうち，Ａグループに含まれる問題は，平成21年度調査，平成27年度調査，平成30年度調査の３問である．また，Ｂグループに含まれる問題は，平成19年度調査，平成20年度調査，平成22年度調査，平成24年度調査，平成25年度調査，平成28年度調査の６問である．

Ａグループでは，これに含まれる３問に共通して，選択肢アのように「帰納的な方法による説明と演繹的な推論による証明は同じである」と考える典型的な誤答が存在する．この誤答の反応率は，正答率を下回っているものの，その差は10ポイント以内である点も３問で共通している．また，平成21年度調査と平成27年度調査の２問については，選択肢イのように「帰納的な方法による説明も，いろいろな場合について確かめれば証明したことになる」とする典型的な誤答が存在し，その反応率はいずれの問題でも正答率を上回っている．つまり，平成21年度調査では形の違うたくさんの三角形で同じように確かめること，平成27年度調査では２つの直線の交わる角度をいろいろに変えて同じように確かめることは証明と同じであると考えている子どもの方が正答できた子どもより多い．これら２種類の典型的な誤答に陥っている子どもは，帰納的な方法による説明も，証明と同等の役割を果たすと考えている点に特徴がある．こうした考え方をしている子どもにとって，演繹的な推論に基づく証明は繁雑な作業に過ぎず，そんなことをしなくても，実測等によっていろいろな場合について図形の性質が成り立つかどうかを確かめて帰納的な方法で説明すればよいと解釈している可能性は高い．また，平成21年度調査ではＢ問題の$\boxed{4}$（１）において，図形の性質を自由記述式で子どもに証明させる問題が出されている．この問題に正答できた子どものうち63.1％は，図９に示したＡ問題の$\boxed{8}$に正しく解答できなかった．すなわち，証明を正しく書くことができても，帰納的な方法による説明と演繹的な推論による証明の違いを理解できていない子どもが半数以上いたことになる．中学校数学科の「図形」領域における指導内容のうち，図形の性質を証明することに苦手意識を持つ子どもは少な

くない．こうした状況を改善すべく，多くの教師が証明できるようにするための指導に工夫を重ねている．しかし，その工夫の対象が証明を書けるようにする指導にばかり向けられてはいないだろうか．たとえ証明を書くことができるようになっても，帰納的な説明との違いが理解できていなければ意味がないことは明らかである．子どもが証明を書く前提として，帰納的な方法による説明と演繹的な推論による証明の違いを理解し，証明の必要性と意味を実感できるようにする指導を今後一層重視していく必要がある．

Ｂグループでは，これに含まれる６問に共通して，選択肢イのように「証明のためにかかれた図形と異なる形の図形については，改めて証明をし直す必要がある」と考える典型的な誤答が存在する．この典型的な誤答に陥っている子どもは，証明のためにかかれた図形が問題に示された条件を満たす全ての図形の代表として示されたものであることを理解できていない．対象となる６つの問題で取り上げられている図形の性質とその証明は異なるので（当然，示されている図形も異なる）単純な比較はできないが，過去６回の調査の結果からは，このような状況に改善の兆しは見られない．こうした考え方をしている子どもにとって，証明の結果得られた図形の性質は図形の形に依存することになるので，その適用範囲は極めて狭くなる．従って，証明が仮定を満たす全ての図形について結論が成り立つことを明らかにする方法であるというよさを実感することはできないだろう．図形の性質の証明についての指導では，証明することと共に，証明の際に用いる図の意味やその果たす役割について明らかにすることにも注意する必要がある．

前述したとおり，図形の性質の証明の指導に難しさを感じている教師は少なくないであろう．しかし，子どもが証明できないことの理由には，根拠を明らかにして筋道立てて考えることの難しさ以外にも，ここで取り上げたような証明の必要性と意味を理解できていないことが関係している点に留意しなければならない．学力調査の結果を基に，図形の性質の証明の課題を多面的に捉え直し，子どもの学びの改善につながる指導を今後一層充実させる方策を検討する必要があるのではないだろうか．

４．おわりに

本研究では，ここまで平成19年度から平成30年度に実施された学力調査のＡ問題のうち，「図形」領域の内容に関する問題に注目し，５つの課題を指摘してきた．今後とも学校現場で指導に当たる教師が，それぞれの課題を認識し，指導を通じて改善に取り組むことが求められるが，ここでは，それ以外に留意すべきことがらを，３点指摘しておきたい．

（1）本研究で指摘した「図形」領域の５つの課題には，関連する問題に対する子どもの典型的な誤答から，原因がある程度予想できるにもかかわらず，その状況が比較的長期間継続していたり，その後の改善が確認されていなかったりしているという共通点がある．これは，「数と式」領域の課題と同様の傾向である（永田潤一郎，2019）．学力調査が，これまでの十数回の調査とその結果の分析を通じて，子どもの学びの実態を明らかにしてきたことは大きな成果であるが，反面，そこから見いだされた課題が固定化してきているという印象を一層強くした．関連する問題を頻繁に出題することで，全国の中学校で数学を指導する教師に注意を促しているのかもしれないが，現時点ではそうしたアピールが功を奏しているとはいえない状況である．まず，こうした現状をしっかり見直す必要がある．

（2）調査を繰り返すことで新たな課題を明らかにすることに終始し，蓄積された課題への対応が疎かになっては本末転倒である．課題が明らかになれば，その解決の糸口がつかめるという単純な話ではないが，課題が課題であり続けることは問題である．これまでに把握できた課題

を総括し，積極的に指導を通じた改善の方策を検討する時期に来ているのではないだろうか．そのためには，国立教育政策研究所が子どもの学習の状況を把握し，教育課程や学習指導の改善に役立てるために実施してきた，特定の課題に関する調査を活用して，これまでに見出された課題の原因をより一層詳細に検討することも考えられるだろう．また，Ｂ問題への対応が中心の授業アイデア例をＡ問題についても充実させ，より具体的な実践事例集などを作成し，各中学校への普及を図ることも考えられるのではないだろうか．

（３）本研究とこれまでの研究で見出したのと同様の状況は，「数と式」と「図形」以外の領域でも発生していることが容易に予想される．今後は，「関数」と「データの活用」の各領域についても，同様の分析を進めることで，課題の顕在化を図り，解決への糸口をつかむことが必要である．

引用・参考文献

・国立教育政策研究所（2012）.「全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ　―児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて―（中学校編）」．教育出版

・文部科学省（2018a）.「中学校学習指導要領（平成29年告示）」．東山書房

・文部科学省（2018b）.「中学校学習指導要領（平成29年告示）解説 数学編」．日本文教出版

・文部科学省（2018c）.「知識・活用を一体的に問う調査問題の在り方について」．http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/130/shiryo/__icsFiles/afieldfile/2018/09/07/1408240_3.pdf（参照：2020.10.22）

・永田潤一郎（2017）.「平成29年版 中学校新学習指導要領の展開 数学編」．明治図書出版

・永田潤一郎（2018）.「平成29年改訂 中学校教育課程実践講座 数学」．ぎょうせい

・永田潤一郎（2019）.「全国学力・学習状況調査の結果に基づく中学校数学科における典型的な誤答の分析～『数と式』領域の考察～」．文教大学教育学部紀要，53，121-130.

・岡本和夫他（2017a）.「未来にひろがる 数学１」．新興出版社啓林館

・岡本和夫他（2017b）.「未来にひろがる 数学２」．新興出版社啓林館