# 高校数学における関数方程式の可能性

嶋野　和史*

# The Potential of Functional Equations for High School Mathematics

Kazufumi SHIMANO

**要旨**　中学校や高等学校の生徒に対し，数学の関数分野の苦手意識を克服するためには，今の学習指導要領にはない新しい見方が必要であると考えている．関数の式やグラフから性質を見出すだけではなく，関数の性質からどんな関数が見出せるのかを学ぶのも関数分野をより深く理解できるきっかけになり得るのではないだろうか．この論文では，関数方程式を取り上げ，中学校から学ぶ方程式の発展的な内容でありながら，初等関数の理解を深める効果がある教材となるかどうかを考察していく．また，関数方程式の応用例として，高校数学にも活用できる話題を紹介する．

**キーワード**：関数方程式　加法的Cauchy関数方程式　加法的関数　指数的Cauchy方程式

## １．はじめに

中学校数学において，初めて方程式を学び始めることになる．これにより，小学校算数の文章題でよく使われる鶴亀算のような計算技法を単純化することが可能となる．ここでいう方程式を解くとは，関係式に含まれている未知数を特定することである．中学校では，１次方程式，連立１次方程式，そして２次方程式の解法を学ぶ．また，関数という概念もこの中学校から学び始めることになり，比例・反比例，１次関数，２次関数の初歩と順に学び進めていくことになる．

高等学校に進むと，方程式については，『数学Ⅱ』では，因数定理を理解した上で高次方程式を解けるようになることが目標となる．関数については，多項式関数，三角関数，指数関数，対数関数，無理関数，分数関数などのいわゆる初等関数を一通り学ぶことになる．関数と方程式のつながりを生徒が理解し始めるのは，２つの関数のグラフの交点の座標を求める辺りからだろう．座標を求めるのだから，満たすべき方程式の未知数を特定するという中学校数学から学んできた方程式の本質からは逸脱されたものになっていない．

著者が気にしている部分として，『数学Ⅱ』で取り上げる多項式の微分を学ぶ以前では，１次関数のような直線のグラフを除き，曲線になる関数のグラフの扱いが，教員の教え方によっては非常に大きな差を生じかねないということである．具体的に言えば，ICTを活用した上でグラフを描き，イメージから関数の特徴を理解させていくことが効果的だからと考える．しかしながら，ICTを活用した数学教育は地域差があり，なかなか全国的な共通ツールとしてなり得ていない．もちろん，『数学Ⅲ』の微分の知識を備えたら，曲線の凹凸を使うことで，フリーハンドで関数のグラフの概形が描けるので，関数の性質の理解はより深まるはずである．しかしながら，理工系分野に興味がある生徒に限定されてしまう話ではある．そこで，高等学校の関数の単元の理解を，微分積分

* しまの　かずふみ　文教大学教育学部学校教育課程数学専修

の知識を極力使わずに深める方法はないのかという点に的をあて研究することにしたいと考えた.

注目したのが，関数方程式という数学的話題である．関数方程式とは，未知関数を含む関係式のことである．そして，その未知関数を特定することこそ，関数方程式の最も重要な存在意義となる．

未知関数の導関数を含んだ関係式，つまり微分方程式も関数方程式の一種である．微分方程式は，多種多様な分野で応用され，重要性は周知されていると考える．その様子は東京書籍の『数学Ⅲ』の教科書[1)]をはじめとした多くの教科書に発展的内容として取り上げていることから分かるものと思われる．しかしながら，微分方程式の変数分離形等の基本的な解法でも，微分積分の知識はもちろん必須であり，高校生にとって理解しやすい話題とは言い難い.

高校生が関数方程式を学ぶ利点として，

① 方程式の解の対象を関数に替えられる.

② 関数の性質から関数を特定できる.

③ 微分積分に捉われない考え方で関数方程式が解ける場合がある.

が挙げられると考えている．そこで，基本的な関数方程式である加法的Cauchy関数方程式を起点として，その応用に触れていき，高校生の関数の理解を深める教材となる可能性があるかどうかを考察していく.

## ２．加法的Cauchy関数方程式

任意の実数 $x, y$ に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{2.1}$$

が成り立つような実数の値をとる関数 $f(x)$ について考える．（2.1）は加法的Cauchy関数方程式と呼ばれ，（2.1）を満たす関数 $f(x)$ のことを，加法的関数という．加法的Cauchy関数方程式は約200年前にA. L. Cauchyにより先駆的な研究がされており，非常に多くの研究者がこれまでに研究テーマにしてきた.

それでは，高校生に，次の質問をしたとしよう.

関数方程式(2.1)が成り立つような関数 $f(x)$ が何か？

関数方程式に馴染みがないはずなので，答えに窮することが予想される．質問の仕方を変えて，今までに習ってきた関数で該当するものはないだろうかと問えば， $x$ に比例する関数，すなわち

$$f(x)=ax \ \left(a \text{は定数}\right)$$

を答える生徒は少数でもいるのではないかと思われる．（2.1）の性質は，小学校の算数で学ぶ長方形の面積の公式とも関連づいている．縦の長さが同じで，横の長さがそれぞれ $x, y$ の２つの長方形を横にくっつけて並べた状況そのままを表していることも分かる．加法的Cauchy関数方程式が，実は非常に身近な数学的な話題であると感じるのではないだろうか.

加法的Cauchy関数方程式の該当する関数，つまり解がどんなものになるかは，関数の性質，例えば連続性があるかどうかで，証明は大きく変わってくる．中学校から高校の数学については，一般的に連続な関数を扱っており，それに基づいて考えていくのが自然であるので，連続な解を特定することにしよう.

（2.1）について， $x=y=0$ とすると，

$$f(0+0)=f(0)+f(0)$$

となる．つまり，$2f(0)=f(0)$となり，$f(0)=0$が得られ，加法的関数のグラフは原点を通ることが分かる．次に， $n$ を自然数とする．（2.1）より，

$$f(n)=\underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n\text{個}}=nf(1)$$

となる.

$q$ を正の有理数とすれば,

$$q=\frac{m}{n} \ (m, n \text{は自然数})$$

と表せる． $m=nq$ であるから，（2.1）を用いると

$$f(m)=f(nq)=\underbrace{f(q)+f(q)+\cdots+f(q)}_{n\text{個}}$$
$$=nf(q)$$

が得られ，前述から $f(m)=mf(1)$ が分かるので，

$$mf(1)=nf(q)$$

ゆえに，

$$f(q)=\frac{m}{n}f(1)=qf(1)$$

となる．

（2.1）について， $y=-x$ とすると，

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)$$
$$f(0)=f(x)+f(-x)$$

となり， $f(0)=0$ より

$$f(-x)=-f(x)$$

が得られ， $f(x)$ のグラフは原点に関して対称なグラフになる．つまり，加法的関数 $f(x)$ は奇関数であることが分かる．

今までの議論から， $x$ が有理数なら，

$$f(x)=f(1)x$$

と表せることが分かる．計算方法としては，性質を繰り返すことを注意しながら指導すれば，高校生でも十分に理解できるものと思われる．

高校生にとって難しいと思われかねないのが，有理数 $x$ を実数にした場合も成り立つかどうかの部分だろう．

正の実数 $x$ を次のように小数で表現する．

$$x=a_0.a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_na_{n+1}\cdots$$

ここで， $a_0$ は０以上の整数とし，小数第 $n$ 位の数 $a_n$ は０以上９以下の整数とする．有限小数になる場合は，ある小数の位からはすべて０になるように表すこととする． $x$ の小数第 $n+1$ 位以降を切り捨てた数を $x_n$ とおくと，この数は有限小数になるので，有理数になっている．ここで，『数学Ⅲ』で学ぶ数列の極限の概念が必要になるが， $x_n$ の定め方から，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

が分かる．しかしながら，「 $n$ が非常に大きくなっていけば， $x_n$ と $x$ はほぼ変わらない」ということを理解させられれば十分なので，『数学Ⅲ』を学んでいなくても理解してくれる生徒は多いと思われる．

以上を踏まえると，正の実数 $x$ に収束する有理数の数列 $\{x_n\}$ は必ず存在する．有理数 $x_n$ については，

$$f(x_n)=f(1)x_n \qquad (2.2)$$

が成り立つ．（2.2）の右辺に注目すると， $n\to\infty$ とすれば，

$$f(1)x_n\to f(1)x$$

が得られ，右辺は $x$ に比例する関数に近づくことが分かる．（2.2）の左辺については， $n\to\infty$ のとき，

$$f(x_n)\to f(x)$$

になることは， $f(x)$ が連続関数であることから分かる．関数の連続性の定義は『数学Ⅲ』で触れられるが，中学校と高等学校で学ぶ関数たちのグラフの直線や曲線から，ある意味で自然な結果であると生徒たちは思うのではなかろうか．つまり，加法的Cauchy関数方程式（2.1）の連続な解 $f(x)$，言い換えれば，連続な加法的関数 $f(x)$ は，

$$f(x)=ax \quad (a=f(1)\text{は任意定数})$$

であることが得られた．

いくつか高度な事実を使いながらも，（2.1）のような単純な関数の関係式から，関数を特定できること，特に， $x$ に比例する関数しかないことを導けることに，生徒からの興味を高める要素があると著者は考えている．

## ３．指数的Cauchy関数方程式

前章では，加法的Cauchy関数方程式の連続な解の導出を考えた．この章では，２章の事実を使って，指数的Cauchy関数方程式

$$f(x+y)=f(x)f(y) \quad (x,y\text{は実数}) \qquad (3.1)$$

の解を求めることを目標とする．

まず， $f(x)\equiv 0$ である場合，すなわち，任意の実数 $x$ に対して $f(x)=0$ となる場合，（3.1）が成り立つことは明らかである．以下，この場合を除いて議論する．

今， $f(x_0)=0$ となる実数 $x_0$ が存在するとする．実数 $x$ に対して，（3.1）を用いれば

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)\\&=f(x+x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

となり， $f(x)\equiv 0$ となってしまう．このことか

ら，（3.1）を満たす関数として，$f(x) \equiv 0$ を除いてしまうと，$f(x)$ は任意の実数 $x$ に対して，$f(x) \neq 0$ でなければならないことが分かる．

（3.1）に $x = y = \frac{z}{2}$ を代入すると，

$$f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right)^2 > 0$$

となるので，$f(x)$ は正値関数である．

（3.1）の両辺の自然対数をとると，

$$\begin{aligned} \log f(x+y) &= \log f(x) f(y) \\ &= \log f(x) + \log f(y) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

が得られる．ここで，対数の性質を用いたことと，自然対数の底は，

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

から定めたNapier数であることに注意しておく．

$g(x) = \log f(x)$ とおけば，（3.2）は

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

と書き直せるので，$g(x)$ は加法的関数であることが分かる．

分かりやすい場合を考えることとして，$f(x)$ を連続関数としておけば，$g(x)$ も連続関数になることは自然な捉え方と見られるだろう．前章を振り返ることで，

$$g(x) = cx \quad (c\text{は任意定数})$$

となる．以上から，

$$f(x) = e^{cx}$$

となり，指数関数が求められる．

## 4．高校数学へのいくつかの応用例

### （1）自然数の累乗の和

$k$ を 0 以上の整数とし，$n$ を自然数とする．このとき，

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k$$

と定義する．

$k = 0$ のとき，

$$S_0(n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{個}} = n$$

となる．

$k = 1$ のとき，自然数 $m, n$ に対して，

$$\begin{aligned} S_1(m+n) &= 1 + 2 + \cdots + m + (m+1) + \cdots \\ &\quad + (m+n) \\ &= S_1(m) + mn + S_1(n) \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$f(x) = S_1(x) - \frac{x^2}{2} \quad (x\text{は任意の自然数})$$

とおけば，

$$\begin{aligned} f(m+n) &= S_1(m+n) - \frac{(m+n)^2}{2} \\ &= S_1(m) + mn + S_1(n) \\ &\qquad - \frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2) \\ &= S_1(m) - \frac{m^2}{2} + S_1(n) - \frac{n^2}{2} \\ &= f(m) + f(n) \end{aligned}$$

が得られる．上の式から，$f(x)$ は自然数全体の集合を定義域とする加法的関数であることが分かり，

$$f(x) = cx \quad (c\text{は定数})$$

で表される．つまり，

$$S_1(x) = cx + \frac{x^2}{2} \qquad (4.1)$$

となる．$S_1(1) = 1$ であるから，（4.1）より

$$1 = S_1(1) = c + \frac{1}{2}$$

となり，$c = \frac{1}{2}$ が得られる．以上から，

$$S_1(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

であることが分かる．

$k = 2$ のとき，自然数 $m, n$ に対して，

$$\begin{aligned} &S_2(m+n) \\ &= 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 \\ &\qquad + (m+1)^2 + \cdots + (m+n)^2 \\ &= S_2(m) + (m^2 + 2m + 1) + \cdots \\ &\qquad + (m^2 + 2mn + n^2) \\ &= S_2(m) + m^2 n + 2m(1 + 2 + \cdots + n) + S_2(n) \\ &= S_2(m) + m^2 n + 2m \cdot S_1(n) + S_2(n) \\ &= S_2(m) + m^2 n + mn(n+1) + S_2(n) \\ &= S_2(m) + m^2 n + mn^2 + mn + S_2(n) \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$f(x) = S_2(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \quad (x\text{は任意の自然数})$$

とおけば，

$$
\begin{aligned}
&f(m+n)\\
&=S_2(m+n)-\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m+n)^3}{3}\\
&=S_2(m)+m^2n+mn^2+mn+S_2(n)\\
&\qquad -\frac{1}{2}(m^2+2mn+n^2)\\
&\qquad -\frac{1}{3}(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3)\\
&=S_2(m)-\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{3}+S_2(n)-\frac{n^2}{2}-\frac{n^3}{3}\\
&=f(m)+f(n)
\end{aligned}
$$

が得られる．上の式から，$f(x)$ は自然数全体の集合を定義域とする加法的関数であることが分かり，

$$f(x)=cx \quad (c\text{は定数})$$

で表される．つまり，

$$S_2(x)=cx+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3} \tag{4.2}$$

となる．$S_2(1)=1$ であるから，(4.2) より

$$1=S_2(1)=c+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

となり，$c=\frac{1}{6}$ が得られる．以上から，

$$S_2(n)=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

であることが分かる．

$k=3$ のとき，自然数 $m,n$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&S_3(m+n)\\
&=1^3+2^3+\cdots+m^3\\
&\qquad +(m+1)^3+\cdots+(m+n)^3\\
&=S_3(m)+(m^3+3m^2+3m+1)+\cdots\\
&\qquad +(m^3+3m^2n+3mn^3+n^3)\\
&=S_3(m)+m^3n+3m^2(1+2+\cdots+n)\\
&\qquad +3m(1^2+2^2+\cdots+n^2)+S_3(n)\\
&=S_3(m)+m^3n+3m^2\cdot S_1(n)\\
&\qquad +3m\cdot S_2(n)+S_3(n)\\
&=S_3(m)+m^3n+\frac{3}{2}m^2n(n+1)\\
&\qquad +\frac{1}{2}mn(n+1)(2n+1)+S_3(n)\\
&=S_3(m)+m^3n+\frac{3}{2}m^2n^2+mn^3\\
&\qquad +\frac{3}{2}m^2n+\frac{3}{2}mn^2+\frac{1}{2}mn+S_3(n)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$f(x)=S_3(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}$$
$$(x\text{は任意の自然数})$$

とおけば，

$$
\begin{aligned}
&f(m+n)\\
&=S_3(m+n)-\frac{(m+n)^2}{4}-\frac{(m+n)^3}{2}-\frac{(m+n)^4}{4}\\
&=S_3(m)+m^3n+\frac{3}{2}m^2n^2+mn^3\\
&\qquad +\frac{3}{2}m^2n+\frac{3}{2}mn^2+\frac{1}{2}mn+S_3(n)\\
&\qquad -\frac{1}{4}(m^2+2mn+n^2)\\
&\qquad -\frac{1}{2}(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3)\\
&\qquad -\frac{1}{4}(m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4)\\
&=S_3(m)-\frac{m^2}{4}-\frac{m^3}{2}-\frac{m^4}{4}\\
&\qquad +S_3(n)-\frac{n^2}{4}-\frac{n^3}{2}-\frac{n^4}{4}\\
&=f(m)+f(n)
\end{aligned}
$$

が得られる．上の式から，$f(x)$ は自然数全体の集合を定義域とする加法的関数であることが分かり，

$$f(x)=cx \quad (c\text{は定数})$$

で表される．つまり，

$$S_3(x)=cx+\tfrac{x^2}{4}+\tfrac{x^3}{2}+\tfrac{x^4}{4} \tag{4.3}$$

となる．$S_3(1)=1$ であるから，(4.3) より

$$1=S_3(1)=c+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

となり，$c=0$ が得られる．以上から，

$$S_3(n)=\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^4}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

であることが分かる．

上の計算と同じように繰り返すことで，

$$
\begin{aligned}
S_4&=-\frac{n}{30}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^5}{5}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}
$$

と求めることができる．

加法的Cauchy関数方程式から分かる結果を用いて，高校数学でよく使われる公式を導けるのは，興味深いところだ．ただし，自然数の累乗の和の公式については，その他にもいくつかの証明方法があり，関数方程式を用いるメリットがあるかどうかは正直判断がつきにくい．しかしながら，大学生でも自然数の累乗の和の公式を導くのはそう容易いことではないので，公式を丸暗記するということから脱却させる１つの教材として

は，活用できる可能性が高いのではないかと考えている．

## （２）確率分布の無記憶性

$X$ を確率変数とし，その値は非負の実数となる確率分布を考える．この確率分布について，無記憶性が成り立つとする．つまり，任意の２つの非負の実数 $s,t$ に対して，

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s) \qquad (4.4)$$

が成り立つ．数学の記号を説明しておくと，

$P(X > s) =$ "$X > s$ となる確率",

$P(X > s + t \mid X > t)$

$=$ "$X > t$ となった下で，

$X > s + t$ となる条件付き確率"

である．条件付き確率は，『数学A』で学ぶが，

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(X > t \text{ かつ } X > s + t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}$$

のことである．以上から，(4.4) は

$$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t) \qquad (4.5)$$

と書き換えられる．

$g(x) = P(X > x)$ とおくと，(4.5) は

$$g(s + t) = g(s)g(t) \quad (m, n \text{は非負の実数}) \qquad (4.6)$$

で表され，指数的Cauchy関数方程式となっていることが分かる． $g(x)$ の連続性が保証されれば，前章から

$$g(x) = e^{cx} \quad (c\text{は定数})$$

が導かれる．このことから，

$$P(0 \leq X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - g(x) = 1 - e^{cx} \qquad (4.7)$$

が得られる．

確率変数 $X$ により定められる確率分布について，確率密度関数を $f(x)$ とおけば，

$$\int_0^x f(x)\ dx = P(0 \leq X \leq x)$$

である．(4.7) より，

$$\int_0^x f(x)\ dx = 1 - e^{cx}$$

両辺を $x$ で微分すれば，

$$f(x) = -ce^{cx}$$

である．

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = P(0 \leq X < \infty) = 1$$

にならなければならないので，(4.7) より， $c < 0$ でなければならない． $\lambda = -c$ とおくと，

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

となる．

以上から，無記憶性をもつ確率変数 $X$ により定められる確率分布は，指数分布に限ることが分かる．

指数分布は連続型確率分布の一種であり，例えば，ある交差点で事故が起きてから，ある交差点で次に起きる事故までの時間や電球の消耗時間などを表す分布として使われている．例えば，東京書籍の『数学B』教科書[2)]では連続型確率分布を取り上げているが，新学習指導要領では統計分野が重要視されることもあり，日常生活と関わる分布として，教材として利用してもよい内容かと考える．

注意として，ここで扱った確率変数 $X$ の値は非負の実数をとるとしていたが，これを自然数に限った場合も，同様な議論により，離散型確率分布の一種である幾何分布に限られることが証明できる．

詳細は，P. K, Sahoo-P. Kannappanの書籍[3)]を参照されたい．幾何分布の例としては，射的を行ったときに，初めて的に当たるまでに撃った回数などが挙げられる．

## （３）微分方程式

次の微分方程式を考える．

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad (4.8)$$

ただし， $y = y(x)$ を $x$ についての関数とし， $k$ は0ではない定数とする．

$y \neq 0$ とし，(4.8) の両辺を $y$ で割れば，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k$$

両辺を $x$ について積分すると，

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ dx = \int k\ dx$$

置換積分法により，

$$\int \frac{1}{y}\,dy = k\int dx$$

$$\log|y| = kx + C \ \ (C\text{は任意定数})$$

$$|y| = e^{kx+C}$$

$$y = \pm e^{c}e^{kx}$$

$\tilde{C} = \pm e^{C}$ とおくと，

$$y = \tilde{C}e^{kx} \ \ (\tilde{C}\text{は任意の定数})$$

が得られる． $\tilde{C} = 0$ のとき， $y \equiv 0$ となり，(4.8) の解であることは明らかである．よって，(4.8) の一般解は，

$$y = \tilde{C}e^{kx} \ \ (\tilde{C}\text{は任意の定数})$$

となることが分かる．

上の解法は，微分方程式の基礎の形である変数分離形の解法としてよく知られている．また，通常は高校３年理系選択の生徒が学ぶことになる『数学Ⅲ』では，発展的内容として教科書に登場している．この解法は，もちろん微分積分の知識が分かっていないと理解は難しいと思われる．また，本学の教育学部数学専修の学生に尋ねても，『数学Ⅲ』は知っていても，発展的内容として微分方程式が教科書で取り上げられているという認識はほとんどないというのが実情である．

微分積分の知識を極力用いずに，微分方程式 (4.8) で記述される現象を説明することができるかどうかを考えていきたい．P. K. Sahoo-P. Kannappan の書籍に紹介されているものをより丁寧に説明しておきたい．

$y = y(x)$ を時刻 $x$ における何らかの値（例えば物体の質量とか）とする．時刻 0 からの関数 $y(x)$ の値の変化を考えるのだが， $y(0) = M_0$ とし， $M_0$ を正の定数としておく．ここで，

$$f(x) = \frac{y(x)}{M_0} \tag{4.9}$$

とおくことにする．$f(x)$ は時刻が $x$ だけ経過したときの値の増加または減少の割合を表している．(4.8) から分かることだが，時刻 $x$ のときの $y(x)$ の変化率 $\frac{dy}{dx}$ は， $y(x)$ の値にしか依らない． $y(x) > 0$ であるから， $k > 0$ なら $y(x)$ は増加し続け， $k < 0$ なら $y(x)$ は減少し続けることになる．(4.9) より，$f(x)$ は

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

を満たす．正の実数 $x_0$ に対して，

$$\tilde{f}(x) = \frac{y(x + x_0)}{y(x_0)}$$

と定めると， $\tilde{f}(x)$ は（4.10）を満たしている．

微分方程式の初期値問題（4.10）の解は実はただ一つしかない．実際に，

$$F(x) = f(x) - \tilde{f}(x)$$

とおけば， $F(x)$ は

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

を満たす．(4.11) の上の式より， $F(x)$ は定数関数であるので，(4.11) の下の条件から， $F(x) \equiv 0$ である．つまり，

$$f(x) \equiv \tilde{f}(x)$$

となる．この事実は，非常に重要な意味をもつ．なぜなら，$f(x)$ は初期値 $M_0$ の取り方に影響せず，時刻 $x$ だけに影響される関数であるからだ．

以上のことを踏まえると， $x_1, x_2$ を正の実数とすると，(4.9) より

$$y(x_1 + x_2) = M_0 f(x_1 + x_2)$$

である．さらに，

$$f(x_1) = \frac{y(x_1 + x_2)}{y(x_2)} = \frac{M_0 f(x_1 + x_2)}{M_0 f(x_2)} = \frac{f(x_1 + x_2)}{f(x_2)}$$

となり，

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2) \tag{4.12}$$

が導かれる．方程式（4.12）は指数的Cauchy関数方程式であるから，３章の結果より，

$$f(x) = e^{cx} \quad (c\text{は定数})$$

が得られる．さらに，

$$y(x) = M_0 e^{cx}$$

である．指数関数の微分が計算できるのなら，

$$c = k$$

であることは，容易に分かるであろう．

微分方程式の解の一意性や指数関数の微分計算が分かっていれば，微分方程式の変数分離形の解法を知らなくても解を求めることは可能であることは分かる．この形の微分方程式は，多くの応用

例があり，例えばアメーバの増殖，水の加熱・冷却，放射性崩壊等のモデルへも適用できることが知られており[4)]，高校数学の枠内でも十分に教材として扱えることは十分可能だと考える．

## 5．まとめ

関数方程式は大学入試や国際数学オリンピックの過去問題にも多く登場している．（例えば，仁平政一の論文[5)]，C. Efthimiouの書籍[6)]を参照されるとよい．）しかしながら，高校数学の教科書に一切登場しないのは少々違和感を覚える．島田茂の書籍[7)]には「中学・高校の段階では，関数は，多くは構成的な形で導入される．そして，その主要な性質を学んでいくが，その性質が記述的なものといえるかどうかはあまり問題にしない．」と述べている．その文章中にある記述というのは，何らかの性質をもっているという意味で，構成というのは，既知の事柄から実行可能な既知の手順を経て作るという意味を指している．数学をより深く理解するためには，この双方向の学習の仕方が重要であると著者は考えており，前述の過去問題の出題者側の意図もそこにあるのではないかと考えている．

２章では，加法的Cauchy関数方程式から比例を表す関数を導出した．また３章は指数的Cauchy関数方程式から指数関数を導出した．これらは，関数の概念の学習に関して，記述から構成への過程をとった考え方を示したものになる．実は，対数的Cauchy関数方程式と呼ばれている

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \left(x, y\text{は 0 ではない任意の実数}\right) \tag{5.1}$$

からは対数関数を求めることができる．そして，三角関数的関数方程式と呼ばれている

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \quad (x, y\text{は任意の実数}) \tag{5.2}$$

からは三角関数を求めることができる．（詳しくはP. K, Sahoo-P. Kannappanの書籍を参照せよ．）『数学Ⅱ』の知識があれば，(5.1) は対数の性質として，(5.2) は三角関数の加法定理の一種として捉えることはできなくもないだろう．以上のことを踏まえれば，関数方程式が，記述から構成への過程を経た考え方を身につける有益な教材として利用できる可能性が高いと見るべきではないだろうか．

本研究では，関数方程式の高校数学における教材化について論じてきた．教科書の関数の単元の中に話題として取り上げる価値は低くはないはずである．しかしながら，『数学Ⅲ』程度の知識の有無で，関数方程式の奥深さの認識が大きく変わってしまうのも，４章の例から感じ取れなくもないのも事実である．その点から，加法的Cauchy方程式と比例との関係性に焦点をあて，高校１，２年生に向けた教材として扱うのがまずは望ましいと考える．４章の例も微分積分の知識をかなり抑えているので，意欲的な生徒たちにとっては，高校数学内の他の単元とのつながりを理解させる教材になり得ると思われる．さらに，大学数学，特に中学校，高校の数学教員を目指す学生たちの教材として，関数の単元の指導に今まで注目していなかった視点を取り入れていくことで，数学教員としてのスキルアップに繋げていくことができるのではと思われる．そして，著者としても，本学教育学部数学専修の解析系科目の今後の学習指導に活用し，教育の質の向上に貢献できれば幸いである．

## 参考文献

１）保野博，河野俊丈編，数学Ⅲ，東京書籍，2015年．
２）保野博，河野俊丈編，数学Ｂ，東京書籍，2015年．
３）P. K. Sahoo and P. Kannappan, Introduction to Functional Equations, Chapman and Hall/CRC, New York, 2011.
４）デヴィッド・バージェス，モラグ・ボリー（垣田高夫・大町比佐栄訳），微分方程式で数学モデルを作ろう，日本評論社，1990年．
５）仁平政一，入試問題のある関数方程式を新し

い視点で解く，https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/sukes_tsushin/38/38-7.pdf

6）C. Efthimiou, Introduction to Functional Equations: Theory and problem-solving strategies for mathematical competitions and beyond, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

7）島田茂，数学教師のための問題集〔教師のための問題集　改題〕，共立出版，2021年.